الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيـة



الجبر

كتاب المُدرِّس

الصَّفُّ التّاسع

مرحلةُ التَّعليمِ الأساسيِّ



المؤسّسة العامة للطباعة

2012–2013 م

1433 هـ

طُبِع أوَّل مرَّة للعام الدراسي 2012–2013 م



منسِّق اللجنة: عدنان الماسنة

المؤلفون

رضوان محمد
فاروق العلي
سناء ابراهيم
فراس الجوني
عدنان الماسنة
كمال نوفل
غسان الحموي
محمد البيريني
مصطفى أبو حسن

التّدقيق العلمي

الدّكتور: عمران قوبا

الدّكتور: عزات قاسم

أ. مروان بركة - أ. ميكائيل

التّدقيق اللّغوي

أ- صفوح الخطيب

التّنضيد والرّسوم والإخراج الفنّي

أسامة أحمد البرم

طبع أوّل مرّة للعام الدراسي
1433 هـ - 2013/2012 م

المقدمة

الزملاء المدرسون:

1. نضع بين أيديكم دليل المدرس لمادة الجبر للصف الثامن الأساسي بطبعته الأولى آملين الاستفادة منه في إعداد الدروس وتنفيذها مما يساعد على تحقيق النتاجات التعليمية المرجوّة.
2. ونحن إذ نضع هذا الدّليل بين أيديكم؛ فإننا نُقدّم أمثلة واجتهادات لا نتوقّع منكم الوقوف عندها فحسب، بل أن تكون منطلقاً لتنمية خبراتكم وإبراز قدراتكم الإبداعية في وضع البدائل والأنشطة المتنوعة وإضافة الجديد إلى المحتوى وبناء أدوات تقويم بمعايير أخرى جديدة.
3. لقد تمَّ تأليف كتاب الطالب وفق رؤية تدريسية نأمل من خلالها تحقيق أهداف الدرس، وهده الرؤية أتت من استراتيجيات تدريس أثبتت الدراسات التربوية جدواها.

استراتيجيَّات تدريس الرياضيَّات

أولاً: تعليم الرياضيَّات من خلال العرض المباشر

وفيه يكون المعلِّم محور عمليَّةِ التعليم – التعلُّم، وهو مصدرُ المعلوماتِ والمعرفة، التي ينقلُها إلى تلاميذُه من خلال العرض المباشر.

والمعلِّم هنا هو المرجعيَّةُ الوحيدة لحلّ المشكلات وتقديم المعلومات الجاهزة وأساليب الحلِّ.

يُعدُّ هذا النموذج فعَّالاً في نقل كمِّيَّةٍ كبيرةٍ من المعلومات في وقتٍ قصير.

سلبيَّات نموذج العرض المباشر

1. يهمِّشُ دورَ التّلميذ في عمليَّة تعلُّمه ويحوِّله إلى مستقبلٍ سلبيٍّ للمعلومات.
2. لا يراعي الفروق الفرديَّة للتلاميذ.
3. لا يسترعي انتباهَ التَّلاميذ واهتماماتِهم.
4. يُفقِدُ التَّلاميذ الرغبةَ في تعلُّم الرياضيَّاتِ، ويساهمُ في تكوين اتِّجاهٍ سلبيٍّ لديهم نحوها.
5. يؤدِّي إلى الخمول الفكريِّ لدى التَّلاميذ.

أمورٌ يجبُ أن تراعى عند استخدام نموذج العرض المباشر:

1. سهولةُ اللّغة ووضوحها.
2. الترتيبُ المنطقيُّ للمعلومات.
3. استخدامُ الاستدلال المنطقيِّ للمعلومات.
4. إشراكُ التَّلاميذ في النقاش.
5. استخدامُ الوسائل التعليميَّة المختلفة.
6. الاستخدامُ المتكرِّر للتقويم.
7. التنويعُ في أساليب الإلقاء.
8. مراعاةُ معارفِ التَّلاميذ وخبراتِهم السابقة.

ثانياً: تعليم الرياضيَّات بالاكتشاف

يقوم على مبدأ محوريَّة التِّلميذ في التعلُّم، ويتيحُ هذا النموذجُ للتلميذِ فرصةَ التفكيرِ ومعالجةِ المعلومات والبحثِ عن الأنماطِ والعلاقات المتضمِّنة فيها.

إستراتيجيَّاتُ التَّعلُّم الاكتشافي :

الاستراتيجيَّة الاستقرائية (Induction):

تتضمَّن هذهِ الاسترتيجيَّة الوصولَ إلى القواعد أو التعميمات عن طريق معالجة عدد من الأمثلة أو الحالات الفردية، وهي ملائمةٌ لتلاميذ الصفوف الأولى حيث أنَّها تُعنى بملاحظة الأنماط والبحث عن علاقاتٍ بين المعلومات، وهذا ما يجيده تلاميذُ الصفوف الأولى.
يمكن أن يوجِّه المعلِّم تلاميذه نحو الاكتشاف الاستقرائيِّ عن طريق عرض مجموعةٍ من الأمثلة، ومن ثَمَّ الوصول إلى تعميمٍ، بعد ذلك يشجِّعُ المعلِّم التَّلاميذ على تجريب أمثلةٍ أخرى للتأكُّد من الاستنتاج.

مثال على الاكتشاف: مجموع قياسات زوايا المثلَّث =180 درجة

يقدِّم المعلِّم للتلاميذ ورقة عمل مرسوم عليها مجموعةٌ من المثلَّثات، ويطلبُ من التَّلاميذ قياس زوايا كلِّ مثلَّث، وجمعَها، وكتابةَ الناتج تحت كلِّ مثلَّثٍ.

يسألُ المعلِّم التَّلاميذَ: ماذا تلاحظون؟ ثمَّ ماذا تستنتجون؟

وأخيراً يطلبُ المعلِّم إلى التَّلاميذ رسمَ مثلَّثاتٍ أخرى، وقياس زواياها للتأكُّد من استنتاجهم.

الاستراتيجيَّة القياسيَّة (Deduction):

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّة توظيفَ مبادئ المنطقِ للوصول إلى تعميماتٍ يمكنُ عندئذ تقويمُها بقصد الوصول إلى حالاتٍ خاصَّةٍ أو تطبيقات لها، وتُعتبَرُ صعبةً بالنسبة لتلاميذِ المرحلة الابتدائيَّةِ، وقد تكونُ أكثرَ ملاءمةً للاستخدام في المراحل المتقدِّمة.

مثال: يستنتجُ التّلميذُ أنَّ مساحةَ المنطقةِ المثلَّثةِ = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع، وذلك باستخدام معرفته السابقة بأنَّ مساحةَ المنطقةِ المستطيلةِ = الطولَ × العرضَ، حيثُ أنَّهُ يمكنُ تقسيمُ المستطيل إلى مثلَّثين متطابقَيْن في المساحة.

ميزاتُ النموذج الاكتشافي:

1. تفعيلُ دور التَّلاميذ في عمليَّة تعلُّمهم.
2. تحفيزُ القدرات العقليَّة للتلاميذ.
3. إكسابُ التَّلاميذ خبرةً في عمليَّات الاستقصاء الرياضيِّ.
4. إطالةُ مدَّة الاحتفاظِ بما يتمُّ تعلُّمه.
5. إكسابُ التَّلاميذِ الثقةَ بالنفس.
6. إكسابُ التَّلاميذ اتجاهاً إيجابيَّاً نحو الرياضيَّات.
7. تشويقُ التَّلاميذ وإكسابُهم الفضولَ لمعرفة المزيدِ من الرياضيَّات، وتشجيعُ التعليم الذاتيّ.
8. إكسابُ المعلِّم قدرةً أكبرَ على التعامُل مع الفروقِ الفرديَّة بين التَّلاميذ.

إرشاداتٌ للمعلِّم حول استخدام النموذج الاكتشافي:

1. تحفيزُ التَّلاميذِ، وتحدّي عقولَهم من خلال المواقف والمشكلات المحيِّرة.
2. الانطلاقُ ممَّا يعرفُه التَّلاميذ والتقدُّم باتِّجاه اكتشاف معلوماتٍ جديدةٍ.
3. عدمُ تدخُّل المعلِّم في عمل التَّلاميذ إلاَّ في أوقات الضرورة.
4. السماحُ بتعدُّد طرقِ واستراتيجيَّاتِ العمل.
5. استخدامُ الموادِّ المحسوسة والوسائلِ التعليميَّة المختلفة.
6. استخدامُ أسلوبٍ فعَّالٍ للمساءلة وإدارةِ الحوار.
7. تشجيعُ العمل في مجموعات.

ثالثاً: تعليم الرياضيَّات عن طريق حلّ المشكلات:

المشكلةُ: موقفٌ جديدٌ يتطلَّبُ حلاً، يستثيرُ في الشخص الرغبةَ في العمل على إيجادِ حلّ له.

يحتلُّ حلّ المشكلات مكانة خاصة في الرياضيَّات، فهو وسيلة الرياضيَّات وغايتها.

كان يتمُّ تدريسُ حلّ المشكلات تقليديَّاً كموضوعٍ في الرياضيَّات. أما وقد بدأ التحوُّل في نظرةٍ جديدةٍ للرياضيَّات وأساليب تدريسها، فقد أصبح المطلوبُ تدريسَ الرياضيَّات في سياق حلّ المشكلات في بيئةٍ صفيَّةٍ مشجِّعةٍ على الاستقصاء.

الشروطُ الواجبُ توافرها في الموقف ليكونَ مشكلةً:

1. إثارةُ رغبة المتعلِّم في إيجاد حلّ للموقف.
2. عدمُ توافرِ طريقةٍ جاهزةٍ للحلّ عند المتعلِّم.
3. استقصاءُ سبلٍ لحلّ الموقف من قبل المتعلِّم.
4. اعتبارُ الموقفِ مشكلةً يرتبطُ بالشخص المعنيِّ بحلّ ذلك الموقف.

استخدامُ حلّ المشكلات كطريقةٍ في التَّدريس:

في العادة يدرِّسُ المعلِّمُ تلاميذَه المفاهيمَ والعملياتِ بطريقةِ العرضِ المباشرِ، ثم يطلُب إليهم استخدامَ هذه المفاهيمِ والعمليَّاتِ في حلّ المشكلات. وفي أحسن الأحوال يكونُ تعليمُ المفاهيمِ والعمليَّات مصحوباً بتفسيراتٍ تتضمَّن استخدامَ المحسوسات والوسائل التعليميَّةِ المختلفة. وعلى الرغم من أنَّ هذا الأسلوبَ قد ينجحُ في تمكين بعض الطلبة من الفهم، غيرَ أنَّه يفشلُ في تحسين اتِّجاه التَّلاميذ نحو الرياضيَّات، ويحرمُهم من متعة الاكتشاف.

إنَّ الفصلَ بين تدريسِ الرياضيَّات وحلّ المشكلات هو فصلٌ بين تعلُّم الرياضيَّات والعمل فيها.

إنَّ التدريسَ من خلال حلّ المشكلات يتطلَّبُ أن يمتلكَ المعلِّم قناعةً كبيرةً بأنَّ لدى الطلبةِ ما يكفي من الأفكار لمساعدتِهم على بناء أفكارٍ جديدةٍ.

وكذلك فإنَّ ضمانَ انخراط التَّلاميذ في عمليَّة التعلُّم يتطلَّبُ أنشطةً تستثيرُ التفكيرَ، أي أنشطة تتضمَّن حلّ مشكلات.

ميزات أسلوب حلّ المشكلات:

1) يساعدُ أسلوبُ حلّ المشكلات في تركيز انتباهِ الطالب للأفكار الرياضيَّة وتكوين المعنى. إنَّ انخراطَ الطالب في عمليَّةِ حلّ المشكلات يجعلُه في حالة تفكيرٍ دائمٍ بالمفاهيم والعمليَّات المتضمَّنة في المسألةِ رابطاً إيَّاها بما لديه من معرفةٍ ومعلوماتٍ سابقة.
2) يوفِّر هذا الأسلوبُ فرصاً حقيقيَّةً للتّلاميذِ للانخراط في معايير العمليَّات الخمس. فليس هناك عمليَّة حلّ مشكلاتٍ تخلو من استخدام الاستدلال الرياضيّ والتواصُل حول الأفكار الرياضيَّة. كذلك، فهناك فرصةٌ كبيرةٌ لاستخدام الترابطاتِ والتمثيل.

3) يساهمُ هذا الأسلوبُ إلى حدٍّ كبيرٍ في تحسين اتِّجاهات التَّلاميذ نحو الرياضيَّات، ويزيدُ من ثقتِهم في قدراتهم. فمن خلال حلّ المشكلات يستشعرُ التَّلاميذ أنَّ الرياضيَّات موضوعٌ مفيدٌ وذو معنى. كذلك فإنَّهم يدركون بأنَّه يمكنُ استكشافُها والعملُ فيها من قبل الجميع، وأنَّها ليست حكراً على نخبةٍ محدودة.

4) يوفِّر هذا الأسلوبُ فرصةً للتقويم المستمرِّ لفهم التَّلاميذ للرياضيَّات. فعند الانهماك في حلّ المشكلات، فإنَّ التَّلاميذ يفكِّرون مع معلِّمهم بصوتٍ عالٍ، ويستخدمونَ استراتيجيَّاتهم ويتبادلون الآراءَ، مما يتيحُ للمعلِّم أن يطَّلع على نقاط قوَّتهم وضعفهم وبالتالي تقديم التغذية الراجعةِ لهم في الوقت المناسب.

5) إنَّ حلّ المشكلات أسلوبٌ ممتعٌ في تدريس الرياضيَّات. فهو ممتعٌ للتَّلاميذ، لأنَّهم يجدون فيه تحدِّياً لتفكيرهم، ويستكشفونَ من خلاله أفكاراً جديدة. وهو ممتعٌ للمعلِّم لأنَّه يراقبُ تلاميذَه وهم يكوِّنون فهماً للرياضيات من خلال الاستدلال والتواصُل وحلّ المشكلات.

6) إنَّ الانخراط في حلّ المشكلات يُكسِبُ التّلميذَ إحساساً بنشوة النجاح عند حلّ مشكلةٍ، ممَّا يدفعُه إلى حلّ المزيد من المشكلات ويثيرُ فضوله إلى تعلُّم المزيد من الرياضيَّات.

مراحل حلّ المشكلة:

1) **فهم المشكلة:** وتتضمَّن هذه المرحلة فهمَ نصِّ المشكلة وتحديد المُعطيات والمطلوب.
2) **وضعُ خطَّةٍ للحلِّ:** وتتضمَّن هذه المرحلةُ اختياراً أو ابتكارَ استراتيجيَّة للحلِّ، وعلى التّلميذ أن يفكِّرَ في الأمورِ الآتية:
   أ- التشابهُ بين المشكلة ومشكلاتٍ أخرى قام بحلِّها في السابق.
   ب- الإستراتيجيَّات التي يعرفُها لحلّ المسائل المشابهة.
3) **تنفيذُ خطَّة الحل:** وهنا ينفِّذ التّلميذُ الخطَّة المقرَّرةَ في المرحلة (2). ولابُدَّ من مراعاة الدِّقةِ في تنفيذ الخطَّة وإجراء الحسابات المتضمَّنة.
4) **مراجعةُ الحلِّ:** على التّلميذ أن يعيد قراءةَ السؤال ويفكِّر فيما إذا أجاب على المطلوب فيها وكذلك فيما إذا كان الجوابُ معقولاً.

إستراتيجيَّات حلّ المشكلات:

1) استراتيجيَّة رسم صورة أو مخطَّط:

وتتضمَّن استخدامَ الرسومات والخرائط والمخطَّطات.
تتأتَّى فائدةُ هذه الطريقةِ من خلال الفرصة التي تتهيَّأُ للتَّلميذ لرؤية المتغيِّرات في المسألة وكذلك العلاقاتُ بين هذه المتغيِّرات.
كما أنَّها تفيد في تنظيم المعلومات وهذا بدوره قد يقودُ إلى اختيار استراتيجيَّة أخرى لحلّ المسألة.

مثال1: أربعةُ أصدقاءَ، صافحَ كلٌّ منهم الآخر مرَّةً واحدةً. ما مجموعُ المصافحات؟

مثال2: ينصبُّ الماءُ في خزَّانٍ بمعدل 50 لتراً في الساعة، ويتسرَّبُ منه بمعدل 15 لتراً في الساعة.

فما الزيادةُ في حجم الماء في الخزَّان بعد مضيِّ 3 ساعات؟

2) استراتيجيَّة التمثيل أو المسرحة:

تقومُ على تمثيلِ الموقفِ أو مسرحته للحصول على الإجابة.

ففي المسألةِ السابقة يمكنُ أن يقوم 4 تلاميذٍ بمصافحةِ بعضهم البعض (على ألاَّ يتصافحَ اثنان أكثرَ من مرَّةٍ واحدةٍ)، ويقوم آخرُ بمتابعة المصافحات وعدِّها.

3) استراتيجيَّة المحاولة والخطأ:

كثيراً ما تساعدُ استراتيجيَّة المحاولة والخطأ في حلّ المسائل الرياضيَّة، ولذلك يجبُ تشجيعُ التَّلاميذ على استخدامها عندما يكونُ ذلك مناسباً.

يجبُ الانتباهُ إلى أنَّه من غير العمليِّ أن تكون كلُّ المحاولات عشوائيةً وغيرَ مرتبطة ببعضها، لأنَّ ذلك يقودُ إلى إطالة الزمن اللاَّزم للحلّ أو قد لا يقود نهائيَّاً.

والصحيحُ أنْ تُبنى كلُّ محاولة على ما سبقها من محاولاتٍ من أجل الاقتراب من الحلّ الصحيح.

مثال: ثمنُ الكرة الصغيرةِ 30 ليرة، وثمن الكرة الكبيرة 50 ليرة. اشترت زينب 10 كرات بمبلغ 360 ليرةً. فكم كرةً صغيرةً وكم كرةً كبيرةً اشترت زينب؟

4) استراتيجيَّة حلّ مسألةٍ أبسطَ:

عادةً ما تستخدمُ هذه الاستراتيجيَّةُ مع استراتيجيَّةٍ أخرى.

تبسيط المسألة يكونُ إمَّا باستخدامِ أعدادٍ أقلَّ أو استخدامِ مسألةٍ مألوفةٍ أكثرَ قد تقودُ إلى استراتيجيَّة مناسبة للحلّ.

كذلك قد يأخذ التبسيطُ شكلاً آخرَ، كتقسيم المسألة ذات الخطوات المتعدِّدة إلى مجموعةٍ من المسائل تُحلّ كلُّ منها على حدة.

مثال: مئة صديقٍ يصافح كلٌّ منهم الآخر مرَّة واحدةً. ما مجموع المصافحاتِ؟

5) استراتيجيَّة العمل للخلف (الحلّ العكسيُّ):

في بعضِ المسائلِ يكونُ العملُ إلى الخلفِ مفيداً ويوفِّر بعض الجهد، خاصَّة إذا كان الطالبُ يواجهُ صعوبةً في تكوين المعادلات الجبريَّة أو استراتيجيَّات العمل إلى الأمامِ بشكلٍ عامٍّ.

واستخدامُ هذه الاستراتيجيَّة يتضمَّن البدءَ من الخلف، أي من ناتج المسألة باتِّجاه مقدَّمتها.

مثال: بائع تفَّاح متجوِّل، يجوبُ القرى ليبيعَ حمولته. وفي يومٍ صادفَ أن مرَّت مبيعاتُه بنمط رياضيٍّ عجيبٍ. ففي كلِّ قريةٍ دخلها، كان يبيعُ نصف ما معه من صناديق التفَّاح. وعندما وصل إلى القرية

الخامسة ، لم يكن معه سوى صندوق واحد ، فباعه وعاد إلى بيته. فكم صندوقاً من التفاح كان معه في بداية الرحلة؟

6) استراتيجيَّة اعتبار كلِّ الإمكانات ثمَّ الحذف:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّة اعتبارَ كلِّ احتمالاتِ الحلِّ، ثمَّ حذفَ الأجوبة الخطأ.

باستخدامِ هذه الاستراتيجيَّات يقوم التّلميذ بحذف الإجاباتِ غير الصحيحة حتَّى يتبقَّى إجابة واحدة هي الإجابة الصحيحة.

مثال: عددٌ أكبرُ من 65 وأقلُّ من 80 يقبل القسمة على 3 بدون باق. الفرق بين الرقمين المكونين لرمزه هو 2. ما ذلك العدد؟

7) استراتيجيَّة البحث عن نمط:

على التّلميذ أن يبحث عن وجودِ نمطٍ في المعلومات المعطاة، أو التي تمَّ الحصول عليها باستخدام استراتيجيَّة أخرى، بعد ذلك يتوصَّلُ التّلميذُ إلى تعميمٍ يستخدمُه في حلّ المسألة. والأنماط قد توجد في الأعداد أو الأشكال أو السلوك.

وكثيراً ما يحتاجُ التّلميذُ عند استخدام هذه الاستراتيجيَّة إلى تكوين جدولٍ أو قائمة بالمعلومات لتسهيل عمليَّة البحث.

مثال: املأِ الفراغاتِ في الجدول:

س	1	2	3	4	6	
ص	2	5	10			65

8) استراتيجيَّة تكوين جدول:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّةُ تنظيمَ البياناتِ في قوائمَ أو جدولَتَها لتسهيل التأمُّل فيها والتفكير بخطَّة مناسبةٍ للحلِّ.

ويجبُ الانتباهُ هنا إلى أنَّ بعض التَّلاميذ لا يفلحون في تنظيم البيانات بشكلٍ ملائم، ممَّا يستدعي مراقبةَ المعلِّمَ عملَهم عن كثبٍ وإبداءَ المساعدة إنْ لزم الأمر.

وكذلك يجبُ أن يُعطى التّلميذُ الفرصةَ الكافية لممارسة تنظيم البياناتِ وجدولتَها لإتقان المهارة.

مثال: ما مجموعُ قياسات الزوايا الداخليَّة لمضلَّع عددُ أضلاعه 20 ؟

9) استراتيجيَّة الاستدلال المنطقي:

وهنا يستخدمُ المتعلِّم قدرتَه على الاستدلال المنطقيِّ في حلّ المسألة.

مثالٌ: لدينا ثلاثُ كراتٍ، الأولى بيضاءُ والثانية حمراءُ والثالثة خضراءُ. تعود هذه الكرات إلى أحمدَ، عليٍّ وزيادٍ :

زياد لا يحبُّ اللَّون الأحمر.

كرةُ عليٍّ هي البيضاء

لمن تعود كلٌّ من الكرات؟

10) استراتيجيَّة تغيير وجهة النظر:

تدعو هذه الاستراتيجيَّة إلى عدم وضعِ شروطٍ غيرِ موجودةٍ في المسألة، فالكثير منَّا يفترِض أحياناً وجودَ شروط في المسألة ممَّا يعيق التفكيرَ في وضع خطَّةٍ ناجحةٍ لحلها.

مثال1: كيف يمكن أن تزرعَ 10 شتلاتٍ في 5 خطوطٍ مستقيمةٍ بحيث يضمُّ كلُّ خطٍّ 4 شتلات؟

مثال2: أعد حلَّ المسألة بحيث تكون المعطيات:

1. 12 شتلة في 6 صفوف بأربع شتلات لكلٍّ منها.
2. 19 شتلة في 9صفوف بخمس شتلات لكلٍّ منها.

11) استراتيجيَّة كتابة جملة مفتوحة:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّةُ كتابةَ معادلةٍ جبريَّةٍ لحلّ المسألة.

مثال: إذا كان شراء مسطرتين و4 أقلام يكلِّف أكثر من شراء قلمين و4 مساطرَ بليرتين. فما الفرق بين سعر القلم وسعر المسطرة؟

مسألتان أساسيَّتان يجبُ مراعاتُهما عند التدريس عن طريق حلّ المشكلات:

1) إنَّ هذا النوع من التدريس يتطلَّبُ من المعلِّم مراقبة التَّلاميذِ مراقبةً حثيثةً ودائمةً أثناء القيام بالحلّ وذلك لمتابعة تقدُّمهم في حلّ المسألة أوّلاً، وللتأكُّد من أنَّ جميعَ التَّلاميذ منخرطين في الحلّ ثانياً، حيث إنَّنا لا نستطيعُ افتراضَ أنَّ جميعَ التَّلاميذ جادّون، فقد يلجأ بعضُهم إلى العبث تاركاً مسؤوليَّة حلّ المسألة لزملائه في المجموعة في حالة العمل التَّعاوني مثلاً.

2) يجبُ أن يستخدمَ التَّلاميذُ أقصى طاقاتِهم في التفكير من أجل حلّ المسألة، وهذا يقتضي أن يضبط المعلِّم مسألةَ إعطاءِ الدلائلِ والمساعدات للتلاميذِ و إلاَّ سيفقدُ حلّ المشكلات أهدافَه المتوخَّاة.

تدريس حلّ المشكلات:

1. **إنَّ تعلم حلّ المشكلات لا يمكنُ أن يتمَّ دون ممارسة:** وهذا يعني أنَّه على المعلِّم أن يجعلَ من حلّ المشكلات موضوعاً دائم الحضور في تدريس كلِّ الموضوعاتِ الرياضيَّة. وهذا يتطلَّبُ تعريضُ التَّلاميذ وباستمرار لمسائلَ مختلفةٍ سواء كجزء من النشاط الصفِّيِّ أو على شكل مسابقات توضع على جداريَّاتِ غرفة الصفِّ أو من خلال الواجباتِ المنزليَّة.
2. **إغناء حصيلة التَّلاميذ باستراتيجيات حلّ المشكلات:** ويمكن للمعلِّم أن يساهم في عمليَّة الإغناء هذه عن طريق الدلائل والمقترحات التي يقدِّمها للتلاميذ عند الحاجة، وكذلك من خلال المناقشة المفتوحة بين التَّلاميذ حول استراتجياتهم المختلفة في حلّ المشكلات.
3. **تنمية روح الاستقصاء لدى التَّلاميذ:** إنَّ المهارة في حلّ المشكلات تتطلَّب من المتعلِّم الرغبةَ في البحث عن الحلول والفضول وحبِّ الاستطلاع. ومن الواضح أنَّ خلقَ مثلِ هذه الرغبةِ ليس سهلاً، وبخاصَّةٍ إذا لم يكن التَّلاميذُ معتادين على حلِّ المشكلات. وهذا يضيفُ عبئاً إلى المعلِّم الذي يجبُ أن يبذلَ كلَّ جهدٍ ممكنٍ لخلقِ مناخٍ ملائمٍ للاستقصاء وحلِّ المشكلات في صفِّه. وممَّا يساعدُه في ذلك اختيارُ مسائلَ ممتعةٍ ومشوِّقةٍ تستثيرُ اهتمامَ التَّلاميذ ورغبتَهم في إيجادِ الحلول. كذلك فقد وُجد أنَّ إعطاءَ التَّلاميذ أنفسَهم الفرصةَ لصياغة المسائلِ وطرحِها على زملائهم ترفعُ من روح الاستقصاءِ لديهم.
4. **إعطاء التَّلاميذ حريَّة استخدامِ استراتيجيَّاتهم الخاصَّة:** على عكس ما قد يعتقد بعضُ المعلِّمين، فإنَّ لدى التَّلاميذ وفي مختلف المراحل الدراسيَّة القدرةَ على ابتكار استراتيجيَّاتٍ خاصَّة بهم لحلِّ المسائل. إنَّ من واجب المعلِّم أن يترك للتلميذ حريَّةَ استخدامِ هذه الاستراتيجيَّات دون فرضِ أيِّ أسلوبٍ خاصٍّ في الحلِّ سواء بشكل صريحٍ أو ضمنيٍّ. وحتَّى عندما تفشل استراتيجيَّاتُ التَّلاميذ في الوصول إلى الحلِّ، فإنَّ على المعلِّم أن يقودَهم إلى استنتاج أخطائهم دون أن يحكُم هو شخصيَّاً على خطأ هذه الاستراتيجيَّات.

أسسُ اختيار المسألة: يجب أنْ:

1) تتضمَّنَ المسألةُ أفكاراً رياضيَّة هامَّةً.
2) يتضمَّنَ سياقُ المسألة كائناتٍ حقيقيَّةً أو محاكاةً واضحةً لكائناتٍ حقيقيَّةٍ.
3) تستثيرَ المسألةُ َ التَّلاميذ.
4) تكونَ المسألةُ مرنة قدر الإمكان (أن تتضمن مستويات مختلفة من الصعوبة).
5) يكونَ بالإمكان إيجادُ مواقفَ مشابهةٍ للموقف الذي تمثِّلُه المسألة.

رابعاً: تعليمُ الرياضيَّات عن طريق التعليم التَّعاوني :

يفيدُ التعليمُ التَعاونيَ بوجود الأقرانِ من التَّلاميذ ويشجِّعُ التفاعلَ بين الطالب وزميلِه، ويبني علاقاتٍ تكامليَّةٍ بين أعضاء المجموعة.

يتعلَّم التَّلاميذ في المجاميعِ الفاعلةِ كيف ينصتون لآراء الغير، وكيف يناقشون ويرفضون، وكيف يقدِّمون، ويقبلون النقدّ البنَّاءَ من زملائهم، وكيفيَّة الشعور بالراحة وعدم الوقوع في الخطأ.

ضمانات التعلُّم التعاونيُّ:

يجب أن يدركَ أعضاءُ المجموعة بأنَّهم جزءٌ من فريقٍ، ولكلٍّ منهم هدفٌ مشتركٌ واحدٌ، و أنَّ لعملِ كلِّ عضوٍ تأثيراً مباشراً على عملِ المجموعةِ، والمسألةُ التي هم بصددِ حلِّها تخصُّ المجموعةَ وأن النَّجاحَ أو الفشلَ في حلِّها يشملُ كلَّ الأعضاء.

ولتحقيق هدف المجموعة يجبُ أن يتحدَّث الأعضاءُ جميعاً مع بعضهم، ويندمجون في النقاشِ حول كلِّ المسائل.

لا يعدُّ جلوس الطلبة معاً مجموعاتٍ جوّاً تعاونيَّاً وهم يعملون على المسائل انفراديَّاً، أو يتركون شخصاً واحداً ينهضُ بأعباء العمل كلِّها. يتطلَّبُ التعاونُ الصحيحُ في عمليَّةِ التعليم إرشادَ المعلِّم والذي يستطيع مساعدةَ التَّلاميذ على فهم آليّة المجموعة، ويسعى في تطوير المهارات التعاونيَّة التي يحتاجونها ويتعلَّمون الرياضيَّات من خلال العمل في مجموعات.

كيفيَّة تكوين وتشكيل مجموعات تعليميَّة صغيرة:

يمكنُ تشكيل المجموعاتِ التعليميَّة بعدَّةِ طرائقَ. وقد صُمِّمت كلُّ طريقة لضمان وجود اعتمادٍ إيجابيٍّ داخلَ كلِّ مجموعةٍ، والتزامٍ فرديٍّ، وتخاطبٍ كلاميٍّ وجهاً لوجه، وتفاعُلٍ اجتماعيٍّ إيجابيٍّ. وتتوجَّه الأساليبُ إلى أربع محاورَ وهي: تشكيلُ المجموعة، وتصميمُ الواجبات(المهام)، وأساليب المكافأة، والمعالجة الجماعيَّة.

أوَّلاً: تكوين المجموعة (Group formation)

يجبُ أن تكون العضويَّةُ في المجموعة متنوِّعةً سواء فيما يخصُّ القدرات أو الخصائصَ الفرديَّةِ، كما يجبُ أن تبقى المجموعةُ ما يكفي من الوقتِ لتطوير التماسُك. إنَّ المجموعة الناجحة ستكون صغيرة ما يكفي لكل واحد حسب حاجته لها، وكبيرة ما يكفي للسماح بتنوع الأفكار والمهارات.

إنَّ الطريقةَ الأكثرَ فاعليَّةً في ضمان التنوُّع هي تنظيمُ المعلِّم المجموعاتِ غير المتجانسة (الذين يذاكرون مع الذين لا يذاكرون، التَّلاميذ ذوي القابليَّات العالية مع المتوسِّطة والمنخفضة...الخ)ويمكن الأخذُ بعين الاعتبار رغبةُ بعض التَّلاميذ في الانضمام إلى من يحُبون من الزملاء.

يُعدُّ أحدُ مقاييسِ نجاح المجموعة استمرارُها. ويأخذُ التماسكُ وقتاً ليتطوَّر في المجموعة. وعندما يعلم التَّلاميذ أنَّهم سيبقون في المجموعة معاً لبعض الوقت فإنَّهم يدركون أنَّ عليهم تحسينَ مهاراتهم المرئيَّةِ المتبادَلة لكي يستطيعوا العملَ بشكلٍ فعَّال.

وقد تُبنى مجموعاتُ التعلُّم الصغيرةِ معاً خلال وحدةِ عملٍ كاملةٍ، أو فصلٍ، أو سنة. وبالرَّغم أنَّه من الضروريِّ بقاءُ المجموعاتِ سويَّة، وتعلُّمهم كيفيَّةَ العملِ بشكلٍ إنتاجيٍّ متناغم، فإنَّ التغييراتِ يجبُ أن تُجرَ إذا لم تعملْ بعض المجموعاتِ بشكلٍ جيّدٍ. وعندما يكون التَّلاميذ غير راضين أو مرتاحين مع أعضاء مجموعتِهم فمن غير المحتملِ إمكانيَّةُ مشاركتهم في التعبير الحرِّ واستكشاف الأفكار. لذا من الضروريِّ أن يبقى المعلِّم على علم بسلوك ومواصفاتِ كلِّ عضوٍ في المجموعة. وإحدى الطرائق لتحقيق ذلك ستكون بمراقبة تفاعلُ التَّلاميذ مع بعضهم في المجموعة.

قد تبدو المجموعةُ وكأنَّها تعملُ بصورةٍ جيَّدةٍ ولكنَّ المشاهدةَ قد تكون خادعة أحياناً، لذا يجبُ الطَّلبُ إلى التَّلاميذ استخدامَ النَّشرات لتبادُلِ شعورهم حول مجموعاتِهم والطَّريقةِ التي يعملون فيها داخلَها. يجبُ أن يعلِّقوا على المساعدة التي تلقُّوها أو التي أبدَوها داخلَ المجموعة. ويجبُ أن يقرِّرَ التَّلاميذ والمعلِّم معاً متى وفيما إذا كان يجبُ استبدال تشكيلاتِ المجموعة.

ويؤثِّرُ حجمُ المجموعة على قابليَّتها كي تكونَ منتجةً. وقد أظهرتِ التجربةُ أنَّ المجموعاتِ المتكوِّنةِ من 3 – 5 طلاَّب تعملُ جيَّداً. ولا يجبُ أن تكون المجموعةُ كبيرةً ، عندها يصبحُ عملُها بصورةٍ فعَّالةٍ أمراً صعباً. ويميلُ الطَّالبُ الأعلى صوتاً للسيطرة ويتراجعُ الهادئون إلى الخلف. ويكون من الصَّعبِ في المجموعةِ الكبيرةِ لكلِّ طالب أن يطلقَ أفكارَه. فضلاً على أنَّه من الصعب على المجموعةِ الكبيرة أن تكونَ منظَّمة لتنسيق عملِها للوصول إلى حالة تناغُم.

ولزيادةِ الشعورِ بالصداقة الحميمة، فقد تطلقُ المجموعة على نفسِها اسماً. وفي حال استقرار المجموعاتِ تؤخَذُ صورٌ لهم، وتوضَع على لوحةِ النَّشرة. وسوف يسهم هذا في إضافة الدفءِ والمتعة لكونهمِ جزءاً من مجموعةٍ تعليميَّةٍ واحدةٍ.

ثانياً: تصميماتُ المهمَّة (Task designs)

لنجاح المجموعة التعلُّميَّة الصَّغيرة، يجبُ على التَّلاميذ أن يتصوَّروا أنفسَهم وكأنَّهم يعتمدون على بعضِهم البعض، وأن يتواصلوا وأن يكونوا مسؤولين عن العمل بشكلٍ فرديٍّ.

يتقاسمُ أعضاء المجموعاتِ الأخرى المسؤوليَّةَ في تعلُّمِ كلِّ فرد، ويتوقَّع من أعضاء المجموعةِ أن يساندوا ويشجِّعوا بعضهم البعض. ويكون التأكيدُ على العمل والتعلُّمِ معاً، ومع ذلك يبقى الأفراد مسؤولين عن تعلُّمهم ومساهماتِهم الفرديَّة في المجموعة.

إنَّ إحدى الطرق التي تضمن مشاركةَ جميع طلاَّب المجموعة في الواجب تكمُنُ في تقسيم المهامِّ الوظيفيَّة بطريقةٍ يكون فيها كلُّ طالب مسؤولاً عن عملِ أو أداءِ جزءٍ واحدٍ من العمل، بحيثُ لا يمكن أن يكتملَ واجبُ المجموعةِ إلاَّ بمشاركة كلِّ طالب بجزءٍ من الواجبِ المناطِ بها. ولتحقيقِ هدف المجموعةِ يجبُ أن يتحمَّل كلُّ فردٍ مسؤوليَّةَ البقيَّةِ لتعلُّم المفاهيم والمهارات.

يعتمدُ التَّعاونُ على التبادليَّة، ويتطلَّبُ استمرار علاقاتِ العملِ المؤثِّرة بين أعضاء المجموعة من كلِّ طالبٍ أنْ يُقدِّر قيمةَ تبادلِ المعلومات، كما ويجبُ أن يكونَ كلُّ طالبٍ مستعدَّاً للعطاء مثلما يأخذ.

ثالثاً: أساليبُ المكافأةِ (Reward structures)

توفِّر أساليبُ المكافأةِ حوافزَ إضافيَّة للسلوك التعلُّميِّ لدى المجموعة الصغيرة بين التَّلاميذ. فمثلاً، بعد أن تسلِّم المجموعاتُ واجباتِها، يتمُّ تقويمُ ناتج كلِّ مجموعةٍ على لوحةٍ يراها جميعُ التَّلاميذ. ولضمان المسؤوليَّةِ الفرديَّةِ تنالُ المجموعةُ درجةً كاملةً على نتائجها، فقط، إذا ما استطاع طالبٌ يتمُّ انتخابَه عشوائياً من إيضاحِ الحلول بصورةٍ كفوءة.

هناك عدَّة طرقٍ لتسجيل واحتساب ما تنتُجه المجموعةُ، بناءً على طبيعة الواجباتِ. حيثُ يمكنُ أن يشتملَ التسجيلُ احتسابَ عددِ الحلول الصحيحةِ، أو التَّقويم الكمِّيِّ لاستراتيجيَّةِ الحلِّ مع درجة بحرف. ويمكنُ أن تتنافسَ المجموعاتُ فيما بينها، أو تجاهَدَ لتلبيةِ مقياسٍ معيَّنٍ.

ويجبُ الانتباهُ كي لا تؤدِّي هذه المنافساتُ إلى رجوعِ التَّلاميذ الضِّعاف إلى المقاعد الخلفيَّةِ أو الأدوار السلبيَّةِ، بل يجبُ أن يكونوا فعَّالين أكثرَ من الطلبة المشاركين.

يكونُ التَّلاميذ العاملونَ متلهِّفون لفحص أحدِهم الآخرَ للتأكُّد من أنَّ كلَّ فردٍ في المجموعة يفهم المادة ويتوافق مع النتائج والاستخلاصات، وهو قادرٌ على تمثيل المجموعةِ، بأن يكون المتحدِّث عنهم. ويطلبُ التَّلاميذ المساعدةَ من بعضِهم البعض في التَّوضيح، ويسألون الأسئلةَ ويجيبونَ عليها. إنَّ نوع التَّفاعلِ الكلاميِّ هو عاملٌ مهمٌّ في نجاحِ المجموعةِ.

وبهذه الأنواعِ من أساليبِ المكافأةِ يشجِّع التَّلاميذ لا ليهتموا بأنفسهم فقط وإنما ببقيَّة أعضاء المجموعة أيضاً.ويشترك التَّلاميذ في التَّعليم الرديف لأنَّ كلَّ عضو في المجموعة يجبُ أن يفهمَ المادةَ، ويدرك كلُّ طالبٍ أنَّ المجموعةَ تتوقَّع من كلِّ عضوٍ إكمالَ الواجبِ المقرَّر وأن يسهم في المجموعة، ويساعد التَّلاميذ أحدهم الآخر. ويوضح أحد التَّلاميذ مفهوماً صعباً لطالب آخر بطريقته الخاصة، ويتشارك أعضاءُ المجموعة المراجعَ والمصادرَ، ويشجِّع بعضُهم الآخرَ للمشاركة. وحتى أولئك الذين يكونون عادةً صامتين سيشعرون أنَّ المجموعةَ تعتمدُ عليهم في المشاركةِ في فعَّالياتها، وأنَّها مسألةُ (الكلُّ للفردِ والفردُ للكلِّ) لأنَّ هذا ما يجعل نجاح المجموعة ممكناً.

وفضلاً عن المكافآت الأساسيَّة التي يمارسُها أعضاءُ المجموعاتِ التَّعاونيَّةِ النَّاجحة، يمكنُ تقديمُ حوافزَ إضافيَّةٍ. فيمكن أن يُمنَحَ أعضاءُ المجموعات النَّاجحة شهادات. كذلك يُمكن وضعُ أسماء المجموعات

الناجحة على لوحة النَّشرة. ويكون التَّلاميذ متحفزين دائماً لتحسين درجاتهم، ولكنَّ مكافأةَ التَّلاميذ بهذه الطَّريقة يجب أن تتمَّ بعنايةٍ، إن إحدى الوسائل الفعَّالة هي تثمين التعاون كنسبة مئوية لدرجاتهم النهائيَّة، عندَها يمكن أن يُمنحَ أعضاءُ الفريق نقاطاً تعاونيَّةً إضافيَّةً.

رابعاً: المعالجة الفرقية (Group processing)

على المعلِّم مساعدةُ التَّلاميذ ليدركوا أنَّ المجموعةَ كي تعملَ بصورةٍ جيِّدة، لا بُدَّ للأعضاء أن يشعروا بالحريَّة في التَّعبير عن آرائهم والسُّؤال وتوضيح الاختلافات. وهكذا، لابد أن يتمتَّع كلُّ شخص بالصَّبر وضبط النفس. وإذا ما تمَّت مناقشة الأفكار كلِّها، حينها فلا بُدَّ أن يرغب أعضاءُ المجموعة بالموازنةِ ، إن الاتِّفاق قد يكون صعباً وليس غالباً ما يتحقق بسبب تجارب التَّلاميذ التَّعليمية السَّابقة.

وليس غريباً أن تنشأ الاختلافاتُ والتبايناتُ حتَّى ولو كانتِ المجموعةُ تعملُ بشكلٍ تعاونيٍّ. ويحتاج أعضاءُ المجموعةِ إلى المهارات لمعالجة مثلِ هذه النزاعات. كما ويجب على المعلِّمين مساعدةُ التَّلاميذ في فهم حقيقةِ أنَّ أعضاءَ المجموعةِ ينبغي أن يكونوا ناقدين للأفكارِ وليس للناس. وعليهم أن يفهموا أنَّ النزاعَ أو الاختلافَ يقوِّي الفهمَ، ويساعدَ المجموعةَ في الوصول إلى الإجماع. كما ينبغّي كذلك أنْ يتعلَّموا أهميَّةَ الإنصاتِ لما يقوله أعضاءُ المجموعاتِ الأخرى ، وفهم الأفكارِ التي لا يتِّفقُون معها. إنَّ مثلَ هذه المهاراتِ في إدارة الخلافاتِ مهمَّةٌ جدَّاً لعمل أيَّةِ مجموعة.

وعلى المعلِّمين أن يراقبوا المجموعات في تقدِّمها، ويقدِّموا النُّصحَ والإرشادَ متى كان ذلك ضروريَّاً. وعندَما يكون أداءُ المجموعةِ ضعيفاً، فيجبُ أن يتدخَّل المعلِّمُ لمساعدة التَّلاميذ بالمهارات التي يحتاجونها. ومتى تمَّ تشخيصُ هذه المهاراتِ ومناقشتُها، فسيرى المعلِّم كيفيَّة أداء المجموعة وإذا كانت تعمل بفاعليَّةٍ أكبر.

يجب أن يوفِّرَ المعلِّم التغذيةَ الرَّاجعةَ، لكي يعلِّم التَّلاميذ مدى إجادةِ أدائِهم. ويمكن أن يطلُبَ المعلِّم من المجموعة أن تراقب أداءَها من خلالِ الإجابة على الأسئلةِ التي تتعلَّق بسلوك وعملِ المجموعة. هل يشاركُ كلُّ عضوٍ في العمل؟ وهل يتعاونُ التَّلاميذ فيما بينهم؟ وهل يديرون ويعالجون الخلافاتِ بصورةٍ جيِّدةٍ؟

دورُ المعلِّم في إدارة تعلُّم المجموعةِ الصَّغيرةِ:

يلعبُ المعلِّمُ دوراً حيويَّاً في تحقيق تعلُّم المجموعة الصَّغيرة الفاعل. وقبل أن يطلبَ إلى التَّلاميذ العملَ في مجموعاتٍ، يجب أن يعطي المعلِّم توضيحاً حول الواجبِ، والوقتِ المخصَّصِ للنشاط، والتَّطلعات التَّعليميَّة للمجموعة، والسلوكيَّات التعاونيَّة المرجوَّة، والخطوات التي يجب اتباعها، وبيان نجاح المجموعة.

وعلى المعلِّم، كمدير للصف، أن ينتبه إلى أنَّ الصَّفَ منظمٌ بطريقةٍ تضمنُ تقاربَ أعضاءِ المجموعةِ بما يكفي للعملِ سويَّةٍ وبراحةٍ تامَّةٍ. ويجبُ أن تكون المجموعات منفصلةً عن بعضِها كي لا تتداخل فيما بينها.

كيفيَّة دمجِ تعلُّم المجموعة الصغيرة بدرس الرياضيَّات:

اختبار تمهيدي/مراجعة: يناسبُ تركيبُ المجموعةُ التَّلاميذ لمساعدة بعضهم البعضِ للتَّحضير للاختبار، ويمكنُ تخصيصُ اختبارِ عيِّنةٍ للواجب البيتيِّ، عندها يلتقي التَّلاميذ في مجموعاتٍ ليناقشوا الاختبارَ العيِّنةَ ويعمِّقوا فهمَهم للمفاهيم والأساليب التي سيختبرون بها. وبالعمل على الاختبار العينيِّ بشكلٍ فرديٍّ، يأتي كلُّ طالبٍ إلى نقاشِ المجموعةِ بصورةٍ دقيقةٍ عن فهمِه. إنَّ التَّلاميذ قادرون على تحضير أنفسهم وأعضاء المجموعة الآخرون للاختبار القادم. ومرة أخرى، تتَّفق كلُّ مجموعةٍ على حلول المسائل ويسلِّمون ورقةَ مجموعةٍ واحدة. ويعطي المعلِّم كلَّ الصفِّ ما يكفي من الوقتِ لمناقشةِ تلكَ النَّواحي التي تحتاجُ للإيضاحِ.

ومن الضَّروريِّ كذلكَ أنْ يحدث التَّعلم بعد أن يُراجَع الاختبار! ويستطيعُ أعضاءُ المجموعةِ أن يساعدوا بعضَهم البعض لفهمِ وتصحيحِ الأخطاءِ. وقد يُمنَح التَّلاميذ الفرصةَ كذلك لإعادة تسليمِ المسائل التي حدث فيها الخطأُ، بشرط أن يحلُّوا كل مسألةٍ بصورةٍ صحيحةٍ، وأن يوضِّحوا لماذا كانت حلولهم الأصليَّة خطأ، وأن يعطوا حلَّهم الجديدَ تبريراتٍ بإعطائهم إيضاحاً مكتوباً للعمليَّات الفرديَّة التي استخدموها.

يمكن لهذا الأسلوب أن يوازنَ التفاعلَ الطبيعيَّ للعديد من التَّلاميذ، والذين كانوا سيقبلونَ الخطأ الماضي، فقط للتحرُّك قدماً للمهمة المقبلة، حيث تنتظرُهم (مهمّةٌ نظيفةٌ). يمكن حينها أخذُ الاختبارات بالحسبان وأن تكونَ الدرجةُ النهائيَّةُ بأخذ معدَّلٍ متوازنٍ لدرجاتِ الاختبار الأوَّل والثَّاني. وربّما يمكن استخدام الاختبارُ الأوَّلُ كثلث الدرجة والثاني كثلثين.

الإثراء (enrichment)

يُعدُّ العملُ الجماعيُّ طريقةً ممتازةً لدمج خبرات الإثراءِ في درس الرياضيَّات، ولتحفيز اهتمام الطالب في موضوعٍ جديدٍ، يمكنُ أن تبحثَ مجموعاتٌ تعلُّميّةٌ صغيرةٌ في التطوّراتِ التاريخيَّة للموضوع. ويجب على أعضاءِ المجموعة تقسيم العمل بينهم. فمثلاً يمكن أن يبحث أحد التَّلاميذ في تاريخ بداية الموضوع، ويكونُ الآخر مسؤولاً عن بيان الرياضيِّين الذين كان لهم دورٌ فاعلٌ في تطوُّرِ الموضوع. وربّما تحتاجُ المجموعةُ لشخصٍ يبحثُ في النوادر والحوادث التي لها علاقةٌ بالموضوع، وأخيراً ، قد يكون ممتعاً لأحد التَّلاميذ أن يبحث في كيفيَّةِ تأثير معرفة هذا الموضوع على العالم. ويمكنُ وضع المشروع هذا على اللَّوحة الجداريَّة الدوريَّة.

تحضير الدّرس لمُدرِّس الصّف

1) **منظِّم الدّرس**:
- أهداف الدّرس.
- مُستلزمات الدّرس.
- المُفردات والمصطلحات الجديدة.

2) **سير الدّرس**:

a) **التّمهيد**: ويتضمّن إحدى النّقاط الآتية على الأقل:
- **صِلة الدّرس**: ربط الدّرس الجديد بما سبق.
- **التّهيئة والتّحفيز**: الإجراءات التي تجعل الطّالب مُستعدّاً للبدء في الدّرس الجديد.
- **التّذكير**: الإجراءات التي تُذلِّل الصّعوبات المتوقّعة أمام التّعلُّم الجديد.

b) **التّدريس**:
- **التّعليم والتّعلُّم**: تحديد وتنفيذ استراتيجيّات التّعليم والتّعلُّم لتحقيق الهدف التّعليمي المطلوب.
- **التّطبيق**: حلّ مّشكلة (سؤال أو مسألة) بهذا التّعلُّم.
- **الأخطاء المتوقّعة**: يّنبّه على الأخطاء التي يمكن أن يقع بها الطّالب في هذا التّعلُّم وكيفية معالجتها.
- **التّقويم المرحلي**: مجموعة الأسئلة التي تُطرح على الطّلاب للتّأكُّد من تحقيق الهدف التّعليمي.

c) **الخاتمة والتّقييم**:
- **التّحقق من الفهم**: مجموعة الأسئلة للتأكُّد من تحقيق أهداف الدّرس.
- **الواجب المنزلي**: مجموعة التدريبات والأنشطة التي تُعطى كواجب منزلي لتعميق العمليّة التّعليميّة بمعدّل تمرين أو تمرينين فقط.

ملاحظة:

المدرس مُلزم بحل تمارين الوحدة كاملة وغير مُلزم بحل جمع تمارين كتاب الأنشطة والتدريبات.

فهـــــرس دليــــــل الجــــــبر

الأعداد الحقيقيّة		84	140
الوحدة الثّالثة	الموضوع	من	إلى
تحضير درس تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد		84	85
3 – 1	تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد	87	90
3 – 2	جمع الأعداد الحقيقية وطرحها	91	93
3 - 3	القيمة المطلقة لعدد حقيقي	94	98
3 – 4	ضرب الأعداد الحقيقية	99	111
3 – 5	القسمة في مجموعة الأعداد الحقيقية	112	117
3 - 6	القوى في مجموعة الأعداد الحقيقية	118	126
تمرينات الوحدة		127	132
نشاط		133	138
اختبار الوحدة (الثانية– الثّالثة)		139	140

النّسبة والتناسب والنّسبة المئوية		141	164
الوحدة الرابعة	الموضوع	من	إلى
تحضير درس سلسلة النسب المتساوية		141	142
4 – 1	النسب والمعدلات	144	146
4 – 2	تطبيقات على التناسب	147	150
4 – 3	النّسبة المئوية	151	153
4 - 4	تتمّات في النّسبة المئوية	154	157
تمرينات الوحدة		158	160
نشاط		161	163
اختبار الوحدة		164	164

الوحدة الخامسة	الموضوع	من	إلى
لغة الجبر		195	198
الوحدة الخامسة	الموضوع	من	إلى
تحضير درس لغة الجبر		165	166
5 – 1	التعابير الجبرية	167	175
5 – 2	تحليل كثيرات الحدود	178	180
5 – 3	المعادلات في $\mathbb{R}$	181	189
تمرينات الوحدة		190	191
نشاط		192	196
اختبار الوحدة		197	198

الوحدة السادسة	الموضوع	من	إلى
المعادلات الخطّيّة		199	238
الوحدة السادسة	الموضوع	من	إلى
تحضير درس		199	200
6 – 1	المعادلات الخطّيّة بمجهولين	202	214
6 – 2	الحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين في $\mathbb{R}$	215	225
تمرينات الوحدة		226	228
نشاط		229	235
اختبار الوحدة		236	237

التّمثيـــــل البيـــــاني بالنّقـــــاط المجمّعـــــة

مُـــــــنظّم الـــــــــدّرس

أهداف الدّرس

استخدامَ التّمثيل البياني بالنّقاط المجمّعة.

استخدامَ التّمثيل بمخطط السّاق والأوراق.

مُفردات جديدة

مُستلزمات الدّرس

أدوات هندسية – كتاب الطالب – السبورة

ســـــــير الـــــــــدّرس

التّمهيـــــــــــد

- اسأل: ما التمثيلات البيانية الإحصائية التي درستها حتى الآن ؟

الجواب: الرسم البياني بالخطوط، الرسم البياني بالأعمدة، الرسم البياني بالنقاط المجمعة

الرسم البياني بالصور ، الرسم البياني بالدائرة، مخطط الساق والأوراق.

- اسأل: ما مقاييس النزعة المركزية ؟

الجواب: المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.

التـــــــدريس



التـــــــــــدريس

- وضح الشكل (1) الوارد في النشاط واسأل:
  1. ماذا نسمي التمثيل البياني المجاور ؟
  2. كم لاعباً في هذا البيان ؟
- كلف المجموعات بالإجابة عن أسئلة النشاط.
- وضح النشاط (2) الذي يدل على المخطط النقطي لدرجات شعبتين في مادة الفيزياء واسأل:

  ماذا يساعدنا المخطط الذي يجمع درجات الشعبتين ؟

  الجواب: يساعدنا للمقارنة بين درجات الشعبتين.
- بين فائدة استخدام النقاط المجمعة في استخلاص النتائج الإحصائية.
- كلف المجموعات بالإجابة عن أسئلة النشاط.
- وضح النشاط وذكّرهم بمخطط الساق والأوراق، واطلب من المجموعات ملء الفراغات في الكتاب.
- أعط الطلاب الوقت المناسب، تلقى الإجابات من الطلاب، عزز الإجابة الصحيحة ناقش الإجابة الخطأ، اطلب تصحيحها من الطلاب.

الخاتمـــة والتقـــويم

تحقق من فهمك:

تتم عملية فرز الأصوات في انتخابات الإدارة المحلية في إحدى البلدات وفق النقاط المجمعة، وضح ذلك.

تمـــــــــــرّن

الوظيفة المنزلية: حل التمرين رقم 4 من كتاب الأنشطة والتدريبات و(حاول أن تحل) من كتاب الطالب صفحة 10.







تحليـــــــلُ البيانـــــــات الإحصـــــــائية



مُحتوى الوحدة

1. تمثيلُ البيانات بالنقاط المجمعة.
   ومخطّط السّاق والأوراق.
2. مقاييسُ النّزعة المركزيّة.
3. مخططُ الصّندوق والسّاعدين.
4. تمثيلُ البيانات بالخطوط والأعمدة.
5. تسجيلُ البيانات وتنظيمها.
6. مخططُ الانتشار وخطّ الاتجاه العام.

علم الإحصاء

يهتمُّ علمُ الإحصاءِ، بجمعِ البياناتِ وتنظيمها وتحليل ظاهرة معيّنة لمُجتمعٍ ما وتفسيرها، واستخلاص نتائجَ مقبولةٍ لاعتمادها والوصول إلى قراراتٍ سليمةٍ مبنيةٍ على هذه البيانات الإحصائيّة.

1 - 1 التّمثيل البياني بالنّقاط المجمّعة

سوف تتعلّم

1- استخدامَ التّمثيل البياني بالنّقاط المجمّعة.

2- استخدامَ التّمثيل بمخطط السّاق والأوراق.

التّمثيل البياني بالنِّقاط المجمّعة



يُوضّحُ المُخطّط المجاور

أعمارَ لاعبي كرة القدم (بالسنوات)

في إحدى مدارسِ الحلقةِ الثّانية للتّعليم الأساسي.

أكمل:

الحل:

1) مفردات هذا البيان هي: 16 ، 15 ، 15 ، 14 ، 14 ، 14، 14، 13 ، 13 ، 13 ، 13.

وعددها 11

2) للبيان منوالان هما 14 ، 13 ، الوسيط = 14

المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{4\times13+4\times14+2\times15+16}{11} = 14$

3) في أي الأعمار تتجمع المفردات السابقة ؟ تتجمع المفردات في عمري 14 وَ 13

نشــــــاط

شُعبتان من الصّف التّاسع عدد التّلاميذ في كلّ منهما 30 تلميذاً، سُجّلت علاماتُ تلاميذ الشُّعبتين في مادة الفيزياء (الدرجة العليا 10)

وتمَّ عرضُها بالمُخطّط النّقطي المجمع الآتي:

3 4 5 6 7 8 9 10

يدلُّ الرمز (×)على تلميذ في الشُّعبة الأولى، والرمز (○) يدلُّ على تلميذ في الشُّعبة الثّانية.

أكمل كلاً مما يأتي:

1) ما منوالُ علامات تلاميذ الشُّعبة الأولى ؟ ﴿ 8 ﴾.
2) ما منوالُ علامات تلاميذ الشُّعبة الثّانية ؟ ﴿ 9 ﴾.
3) ما أقلُّ علامة في الشُّعبة الأولى ؟ ﴿ 3 ﴾.
   وما أقلُّ علامة في الشُّعبة الثّانية ؟ ﴿ 4 ﴾.
4) ما مدى علامات التّلاميذ في الشُّعبة الأولى ؟ ﴿ 7 ﴾.
   وما مدى علامات التّلاميذ في الشُّعبة الثّانية ؟ ﴿ 6 ﴾.
5) ما العلامة التي يتساوى فيها تلاميذ الشُّعبتين ؟ ﴿ (العلامة 7)،(العلامة 6)﴾.
6) لماذا لم نكتب العلامات: 2، 1، 0 في المُخطّط ؟ ﴿ لم يحصل أي تلميذ على أي من هذه العلامات﴾.

تــذكّر

مقاييس النزعة المركزية هي:

أ) المتوسط الحسابي $\bar{x}$ ويساوي:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عددها}}$$

ب) الوسيط $\tilde{x}$ هو:

- المفردة الوسطى (إذا كان عدد البيانات فردياً).
- متوسط المفردتين الوسطيتين (إذا كان عدد البيانات زوجياً).

وذلك بعد ترتيب المفردات تصاعدياً أو تنازلياً.

ج) المنوال M هو المفردة الأكثر تكراراً.

حاول أن تحلّ

يدلُّ البيان الآتي على علامات التّلاميذ الأوائل في الصّف التّاسع الأساسي (مادة اللغة العربية) في إحدى المدارس وهي:

54 56 56 60 60 56 55 58 58

مثّل هذا البيانَ بالنقاط المجمعة، ثُمّ استخدمه في حساب كل من المدى، المنوال، الوسيط، المتوسّط الحسابي.

الحل:

المدى: $R = 60 - 54 = 6$.

المنوال: $M = 56$.

الوسيط: $\tilde{x} = 56$.

المتوسط: $\bar{x} = \dfrac{54 + 55 + 3 \times 56 + 2 \times 58 + 2 \times 60}{9} = 57$.

		×		
		×	×	×
×	×	×	×	×
54	55	56	58	60

مُخطّـــــــط السّـــــــاق والأوراق

نشـــــاط

تـــــذكّر: يكون عدد المفردات في مخطط الساق والأوراق هو عدد الأوراق.

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي على أطوال 20 تلميذاً (مقدرة بالسنتيمتر) في الصّف التّاسع الأساسي:

142	160	163	140	153	153	121
132	134	142	160	161	152	153
153	142	140	134	133	141	

يُكتبُ العدد 121 مثلاً في مُخطّط السّاق والأوراق بالشّكل 12|1 ويسمى المفتاح.

أكمل مُخطّط السّاق والأوراق المجاور، ثُمّ استنتج:

أصغر مفردة ، أكبر مفردة ، المنوال ، الوسيط ، المدى.

الساق	الأوراق					
12	1					
13	2	3	4	4		
14	0	0	1	2	2	2
15	2	3	3	3	3	
16	0	0	1	3		

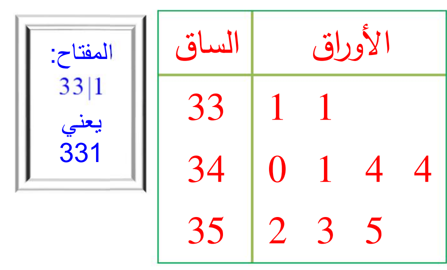
المفتاح: 12|1 يعني 121

الجواب: أصغر مفردة = 121 ، أكبر مفردة = 163

المنوال = 153 ، الوسيط = 142 ، المدى = 42 .

حاول أن تحلّ

يُبيّن التّمثيل بالسّاق والأوراق المجاور محاولاتِ أحد المتسابقين في الوثب الطّويل (مقدّرة بالسنتيمتر).



الساق	الأوراق			
33	1	1		
34	0	1	4	4
35	2	3	5	

المفتاح: 33|1 يعني 331

أوجد كلاً من:

عدد المُفردات ، المنوال ، الوسيط ، المدى.

الجواب: عدد المفردات = 9 ، المنوال: للبيان منوالان 344 ، 331

الوسيط = 344 ، المدى هو: 355−331=24 .

2 - 1 مقاييس النّزعة المركزيّة



سوف تتعلّم

استخدامَ مقاييس النّزعة المركزيّة.

تعلّم

إذا كان عدد المفردات n فإن:

1) رُتبة الوسيط = $\frac{n+1}{2}$ إذا كان n فردياً.

2) رتبتي المفردتين الوسطيتين هي: $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}$ إذا كان n زوجياً.

تطبيق ①

في البيانِ الإحصائي: 20 18 18 20 19 12 17 18 15 15 24

أوجد كلاً من الوسيط، المتوسّط الحسابي، المنوال.

الحل:

نُرتّبُ البياناتِ تصاعديّاً: 24 ، 20 ، 20 ، 19 ، 18 ، 18 ، 18 ، 17 ، 15 ، 15 ، 12

رتبةُ الوسيط: $\frac{11+1}{2}=6$

إذن الوسيط هو: $\tilde{x} = 18$

المتوسِّطُ الحسابي $\bar{x} = \frac{12+2\times15+17+3\times18+19+2\times20+24}{11} = 16$

المنوالُ: $M = 18$

تطبيق ②

استلمَ 14 موظفاً رواتبهم الآتية(مقدرة بآلاف الليرات السورية):

20 14 12 12 10 11 12 20 10 15 14 12 10 10



أوجد كلاً من الوسيط، المتوسّط الحسابي، المنوال لرواتبهم.

الحل:

نُرتِّبُ البيانات تصاعديّاً: 20 20 15 14 14 12 12 12 12 11 10 10 10 10

رُتبتا المُفردتين الوسطيّتين هما: $\frac{14}{2}+1=8$, $\frac{14}{2}=7$

الوسيط : $\tilde{x}=\frac{12+12}{2}=12$

المتوسِّطُ الحسابي هو: $\bar{x}=\frac{4\times10+11+4\times12+2\times14+15+2\times20}{14}=16$

المنوالُ: للبيانِ منوالان هما 10 و 12.

تطبيق 3

1. في المُفردات: مقبول، جيد، جيد جداً، جيد، ضعيف. المنوال جيد.
لإيجاد الوسيط نرتب المُفرداتِ تصاعدياً: ضعيف، مقبول، جيد، جيد، جيد جداً.
الوسيط جيد. لا يوجد لهذا البيان متوسّط حسابي.
2. في المُفردات: أزرق، أسود، أحمر، أسود، أبيض. المنوال أسود.
لا يمكن حساب المتوسِّطِ الحسابي في هذا البيان لأنّ المتوسط الحسابي عدد ،
وكذلك لا يمكن حسابُ الوسيط. لأنّه لا يمكن ترتيب الألوان الموجودة.

مثال 1

عند المزارع مروان خمس شجرات زيتون إنتاجها 230 30 25 20 15

وعند المزارع محمود ست شجرات زيتون إنتاجها 65 60 50 30 15 10 (مقدرة بالكيلو غرام).

أيّهما أفضل إنتاجاً شجرات مروان أم شجرات محمود؟

الحل:

للقيمة المُتطرِّفة أهميّة في هذا المثال لذلك نعتمد على المتوسِّط الحسابي.

نوجد المتوسِّطَ الحسابي لإنتاج شجرات كلّ من مروانَ ومحمود

المتوسِّطُ الحسابي لإنتاج شجرات مروان يساوي : $\bar{x}=\frac{15+20+25+30+230}{5}=64$

المتوسِّطُ الحسابي لإنتاج شجرات محمود يساوي: $\bar{x}=\frac{10+15+30+50+60+65}{6}=55$

نستنتجُ أنّ شجرات المزارع مروانَ أفضلُ إنتاجاً من شجرات المزارع محمود .

مثال2

تقدّم (11) شخصاً للحصول على وظيفة في إحدى الوزارات (الدرجة من 100) فحصلوا على الدّرجات الآتية:

0   0   4   5   6   8   10   11   12   13   96

أيّ واحد من مقاييس النّزعة المركزيّة هو الأفضل لتمثيل درجة الغالبية العظمى من هؤلاء الأشخاص ؟

الحل:

- إنّ منوال الدّرجات هو الصّفر (علل ذلك) لأن الدرجة صفر هي التي تكررت في هذا البيان.

إنّ الدرجة صفر لا تعبِّر عن درجة الغالبية من الأشخاص، فالمنوال غير مناسب.

- المتوسّط الحسابي: $\bar{x} = \frac{0+0+4+5+6+8+10+11+12+13+96}{11} = 15$

إنّ الدرجة 15 أكبر من درجات غالبية الأشخاص فهي لا تمثل درجاتِهم لأنّ القيمة المُتطرِّفة أثرت في المتوسِّط.

- أما الوسيط $\tilde{x} = 8$ فيعبِّر عن درجة غالبية هؤلاء الأشخاص لأنه لا يتأثر بالقيم المُتطرِّفة.
فهو الأفضل في تمثيل درجة غالبية هؤلاء الأشخاص.

ملاحظة

1. إنْ وُجد المنوالُ فهو مفردة من مفردات البيان الإحصائي، وقد يكون للبيانِ أكثرُ من منوال.
2. إنّ الوسيط مفردة من مفردات البيان إذا كان عدد المُفردات فردياً.

   أما إذا كان عدد المُفردات زوجياً فقد لا يكون من المُفردات.

3. قد يكون المتوسِّطُ الحسابي أحدَ المُفردات وقد لا يكون.

حاول أن تحلّ

في البيانِ الإحصائي الآتي: $2 , a , b , c$ (أعداد طبيعية مرتبة تصاعدياً)، الوسيط = 6 ،

المتوسِّطُ الحسابي = 7، إذا كان لهذا البيانِ الإحصائيّ منوالٌ، فأوجد كلَّ منوالٍ يحقّق هذا البيان.

الحل:



البيان: $2\ ,a\ ,b\ ,c$ ، الوسيط: $6 = \frac{a+b}{2} = \tilde{x}$ أي $a + b = 12$

المتوسط الحسابي: $7 = \frac{2+a+b+c}{4} = \bar{x}$

$2 + a + b + c = 28$ ومنه $2 + 12 + c = 28$ أي $c = 14$

البيان الإحصائي: $2, a\ , b\ , 14$ ، الحالات الممكنة:

أ) $a = 2\ , b = 10$ ، البيان هو: $2\ ,2\ , 10\ , 12$

ب) $a = 6\ , b = 6$ البيان هو: $2\ ,6\ , 6\ , 14$

تحقق من فهمك

تقدّم 30 طالباً لأداء اختبار في مادة الرياضيات، فإذا كان المتوسِّطُ الحسابي لدرجات 20 طالباً هو 45 درجة.

ومتوسط درجات الباقي من الطلاب هو 30 درجة، **فأوجد المتوسِّط الحسابي لدرجات جميع الطلاب.**

الحل:

مجموع درجات 20 طالباً = 20 × 45 = 900 درجة

مجموع درجات باقي الطلاب = 10 × 30 = 300 درجة

$$\bar{x} = \frac{20 \times 45 + 10 \times 30}{30}$$

$$= \frac{900 + 300}{30}$$

$$= 40$$

3 - 1 الرّبيعـــــات ومخطّـــــط الصّــــــندوق والسّـــــاعدين



سوف تتعلّم

1. الرُّبيعِّات.
2. مخطّط الصّندوق والسّاعدين

يُستفاد من الطّاقة الشّمسية في عمليّة تسخين الماء وتحوي أجهزة الطاقة حساساتٍ للحرارة كما في الشكل أعلاه إذ تُقسم الشّاشة أربعة أرباع لبيان كميّة الماء في خزانات الطّاقة.

الرّبيعّـــــــــــــــــــــــات

نشــــــاط1

في البيانِ الإحصائي الآتي (المفردات مرتبة تصاعدياً):

65 68 75 80 87 88 90 91 93 97 98

أكمل: عددُ المفردات = 11 (فردي)

رتبة الوسيط = $\frac{11+1}{2}=6$ ، الوسيط : $\tilde{x}=88$

الأعدادُ التي تسبقُ الوسيط هي: 87، 80، 75، 68، 65 وسيطها Q_1 يساوي 75

ونسمّي Q_1 الرُّبيِّع الأوّل (الأدنى).

الأعداد التي تلي الوسيط هي: 98، 97، 93، 91، 90 وسيطها Q_3 يساوي 93

ونُسمِّي Q_3 الرُّبيِّع الثّالث (الأعلى)، كما نُسمِّي $\tilde{x}$ الرُّبيِّع الثاني ونُرمِّزه Q_2

ارسمْ مربعاً حولَ كلٍّ من Q_3 , Q_2 , Q_1 في البيانِ السابق:

65 68 [75] 80 87 [88] 90 91 [93] 97 98

تجد أنّ الرُّبيِّعات تقسم البيان إلى أربعة أقسام متساوية بعدد مفرداتها.

نشـــاط 2

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي على درجات 16 تلميذاً في الصّف التّاسع في مادة التّربية الوطنيّة(العلامة من 20)

العلاماتُ مرتبة تصاعدياً: 20 20 20 18 18 17 16 16 14 12 12 12 10 10 8 5

أكمل: عددُ المفردات = 16 (زوجي) ، رتبتا المفردتين الوسطيتين هما: $\frac{16}{2}+1=9$, $\frac{16}{2}=8$

الوسيطُ هو: $Q_2=\frac{14+16}{2}=15$

الرُّبيِّع الأوّل (الأدنى) هو: $Q_1=\frac{10+12}{2}=11$

الرُّبيِّع الثّالث (الأعلى) هو: $Q_3=\frac{18+18}{2}=18$

أشرْ إلى كلٍّ من Q_3 , Q_2 , Q_1 في مكانها تجد أنّ الرُّبيِّعات تَقسِمُ البيان الإحصائي إلى أربعة أقسام متساوية.

20، 20، 20، 18، 18، 17، 16، 16، 14، 12، 12، 12، 10، 10، 8، 5

Q_3 ↑ (بين 18، 18) Q_2 ↑ (بين 16، 14) Q_1 ↑ (بين 12، 10)

تعلّم

- يُسمّى الوسيط $\tilde{x}$ الرُّبيع الثاني (الأوسط) ويرمز Q_2.
- Q_1 هو وسيط المفردات الأصغر من Q_2 .
- Q_3 هو وسيط المفردات الأكبر من Q_2 .
- الرُّبيعات تقسم البياناتِ المرتبة تصاعديّاً إلى أربعة أقسام متساوية تقريباً.

تطبيق

اشترك 14 تلميذاً من تلاميذ الصّف السّابع في مسابقةِ تمكين اللّغة العربيّة (الدرجة من 100) فكانت درجاتهم كالآتي:

97 95 94 83 80 79 77 75 75 74 74 73 73 71

أوجد الرُّبيِّعات.

الحل

عددُ المفردات = 14 ، رتبتا المفردتين الوسطيّتين: $\frac{14}{2}+1=8$, $\frac{14}{2}=7$

الوسيط : $\tilde{x}=\frac{75+77}{2}=76$ وهو الرُّبيِّع الأوسط (الثاني)

الرُّبيِّع الأوّل (الأدنى) هو: $Q_1=74$ ، الرُّبيِّع الثّالث (الأعلى) هو: $Q_3=83$

نجد أنّ: درجاتِ ربع التّلاميذ أصغرُ من 74 ، ودرجاتِ رُبع التّلاميذ أكبر من 83

تحقق من فهمك

ما خطوات إيجاد الرُّبيِّعات؟

1) نرتب المفردات ترتيباً تصاعدياً
2) نحسب الوسيط(الربيع الثاني)Q_2.
3) نحسب Q_1 وسيط المفردات التي تسبق Q_2.
4) نحسب Q_3 وسيط المفردات التي تلي Q_2.

مخطــط الصّــــندوق والسّــــاعدين

نشـــــاط

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي على علامات التّلميذات في مادة الرّياضيّات في شعبة للصف التّاسع الأساسي:

18 22 25 33 36 38 41 42 47 48 49 55 55 57 60

أوجد كلاً من: أكبر مفردة، أصغر مفردة، الوسيط، الرُّبيِّع الأوّل، الرُّبيِّع الثّالث ثُمَّ مثّلها على خطّ الأعداد.

الحلّ:

العلامات مرتبة تصاعدياً:

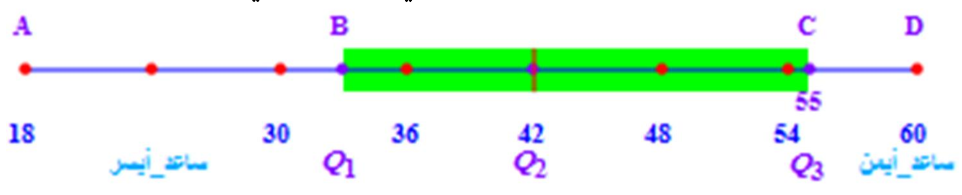
18 22 25 33 36 38 41 42 47 48 49 55 55 57 60

أكبر مفردة: 60 ، أصغر مفردة: 18 ، الوسيط: 42 ، الرُّبيِّع الأوّل: 33 ، الرُّبيِّع الثّالث: 55

عددُ المفردات 15 (فردي)



نرسمُ على خطّ الأعداد مستطيلاً بين الرُّبيِّعين الأوّل والثّالث كما في الشّكل الآتي:



نُسمِّي الشّكل الناتج مُخطّط الصّندوق والسّاعدين لهذا البيان.

و $[AB]$ السّاعد الأيسر و AB المدى الأدنى

و $[CD]$ السّاعد الأيمن و CD المدى الأعلى

و المستطيل الملوّن: الصّندوق، و طول الصّندوق: $BC = Q_3 - Q_1$ (المدى الرُّبيِّعي)

تعلّم

لإنشاء مخطط الصندوق والساعدين نحتاج إلى خمس مفردات هي:
أصغر مفردة ، أكبر مفردة ، الوسيط ، الربيع الأدنى ، الربيع الأعلى

تطبيق

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي على أعمار 20 مدرساً (بالسنوات) حصلوا على وظائف جديدة

23 24 24 24 25 25 25 25 25 25 27 27 27 27 28 28 28 29 30 31

أنشئ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين لهذا البيان الإحصائي.

الحل:

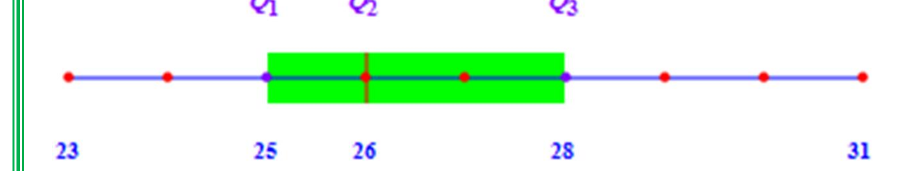
البيانات مرتبة تصاعدياً:

23 24 24 24 25 25 25 25 25 25 27 27 27 27 28 28 28 29 30 31

عددُ المفردات = 20 ، الوسيط(الرُّبيّع الثاني): $Q_1 = \frac{25+27}{2} = 26$

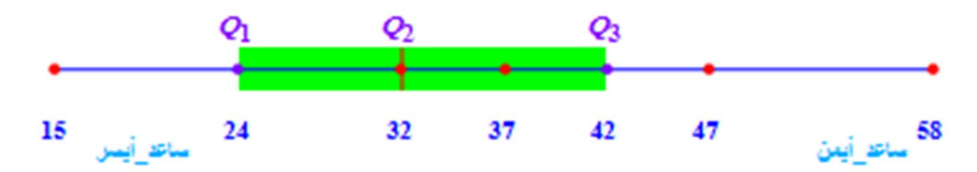
الرُّبيّع الأوّل (الأدنى): $Q_2 = \frac{25+25}{2} = 25$، الرُّبيّع الثّالث (الأعلى): $Q_3 = \frac{28+28}{2} = 28$

مُخطّط الصّندوق والسّاعدين:



حاول أن تحل

يدلُّ المُخطّط المجاور على علامات التّلاميذ في إحدى شعب الصّف التّاسع الأساسي (مادة اللّغة العربية):



1) ما أقل علامة في الشّعبة ؟15

2) ما أعلى علامة في الشّعبة ؟ 58

3) استنتج أنّ:

a) % 25 تقريباً من التّلاميذ علاماتهم أقل من 24

b) % 50 تقريباً من التّلاميذ علاماتهم أقل من 32

c) % 25 تقريباً من التّلاميذ علاماتهم أعلى من 42

4) احسب المدى في كلّ ربع ثُمَّ استنتج الربع الذي تتقارب فيه المفردات أكثر من غيرها.

نحسب المدى في كل ربع:

المدى بين Q_1 وأصغر مفردة : $24 - 15 = 9$

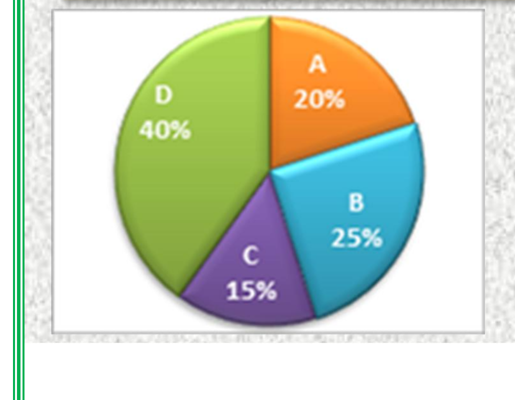
المدى بين Q_1 ، Q_2 : $32 - 24 = 8$

المدى بين Q_2 ، Q_3 : $42 - 32 = 10$

المدى بين Q_3 وأكبر مفردة $58 - 42 = 16$

إذن: تتقارب المفردات ما بين Q_1 ، Q_2 أكثر من بقيّة الأرباع.

4 - 1 التّمثيـــل البيـــاني بالأعمـــدة والقطاعـــات الدّائريـــة



سوف تتعلّم



1. استخدامَ التّمثيل البياني بالأعمدة.
2. استخدامَ التّمثيل البياني بالقطاعات الدائرية.

التّمثيـــلُ البيـــاني بالأعمـــدة

نشـــــاط1

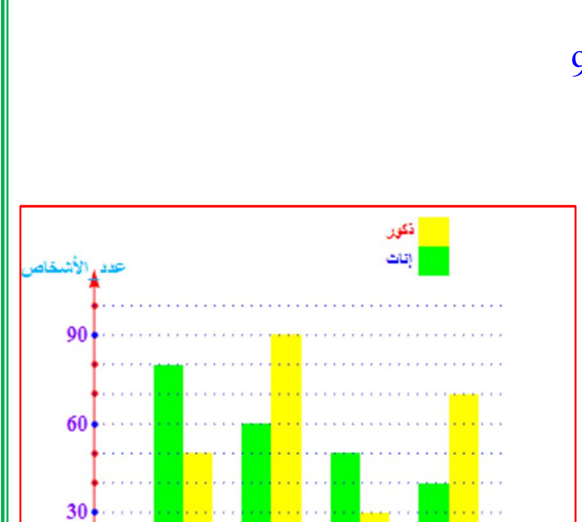
يدلُّ الشّكل الآتي على عدد زوّار المركز الثقافيّ في أحد الأسابيع، أجب عما يأتي:

1) أيّ الأيام التي يتساوى فيها أعداد زوار المركز؟ الأحد والخميس
2) في أيّ يوم بلغ عدد الزوار 70 زائراً ؟ الاثنين
3) أيّ أيام هذا الأسبوع كان أكثرَ ازدحاماً بالزوار؟ الجمعة
4) كم زائراً زارَ المركز الثقافي يومي الجمعة والسبت؟ 90+100=190

لاحظ أنّ تمثيل البيانات بالأعمدة يُستخدمَ لتوضيح المقارنة.

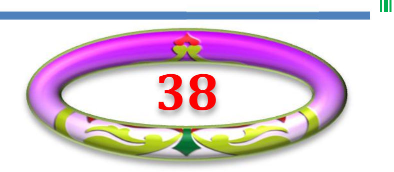


نشـــــاط2



يدلُّ الشّكل الآتي على أعداد الدارسين في كلية الاقتصاد مُوزّعين حسب الاختصاص:

1) في أي اختصاص يتساوى عدد الذكور مع عدد الإناث من اختصاص آخرَ؟ اقتصاد إناث ومحاسبة ذكور
2) ما الاختصاصُ الذي سَجّل فيه أكبرُ عدد من الذكور؟ محاسبة
3) ما عدد الذكور المسجّلين في هذا الفرع ؟ 50+90+30+70=240
4) ما عدد الإناث المسجلات في هذا الفرع ؟ 80+60+50+40=230



التّمثيل البياني بالقطاعات الدّائريّة

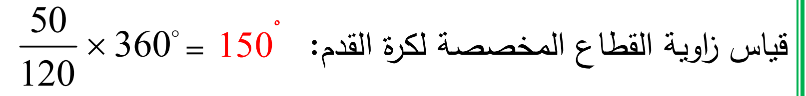
نشـــــاط1

يدلُّ الجدول الآتي على الرياضة المفضلة لتلاميذ إحدى المدارس، مثِّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

نوع الرياضة	ألعاب القوى	كرة الطائرة	كرة السلة	كرة القدم
عدد التّلاميذ	15	30	25	50

الحل:

عدد التّلاميذ: $120 = 50+25+30+15$



قياس زاوية القطاع المخصصة لكرة القدم: $\frac{50}{120}\times 360^\circ = 150^\circ$

ما قياس زاوية القطاع المخصصة لكل واحدة من الألعاب الباقية ؟

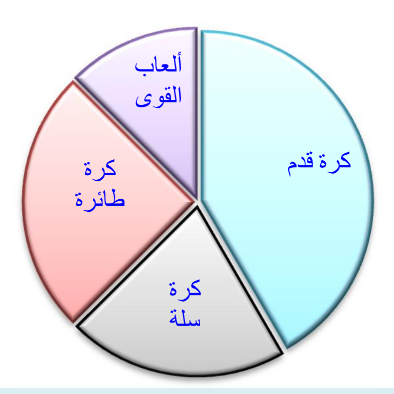
قياس زاوية القطاع المخصصة لكرة السلة = $\frac{25}{120}\times 360 = 75^\circ$

قياس زاوية القطاع المخصصة لكرة الطائرة = $\frac{30}{120}\times 360 = 90^\circ$

قياس زاوية القطاع المخصصة لألعاب القوى = $\frac{15}{120}\times 360 = 45^\circ$

أكمل رسم القطاعات الدائرية.

لاحظ أن التمثيل بالقطاعات الدائرية يُستخدَم لمقارنة الأجزاء بالكلّ.



ملاحظة: يمكن حساب قياس زاوية القطاع المقابل للمفردة 50 (مثلاً) بالعلاقة: $\frac{x}{360^\circ} = \frac{50}{120}$

نشـــــاط2

التاسع $\frac{3}{4}x$
الخامس $\frac{7}{4}x$
الثامن x
السادس x
السابع

تأمـل الرسـم فـي القطاعـات الدائريـة، الـذي يـدلُّ علـى عـدد التّلاميـذ المسجلين في إحدى مدارس الحلقة الثانية من التعليم الأساسي (من الصّف الخامس حتى الصّف التّاسع)، ثُمَّ أجب عن الأسئلة الآتية:

1) ما مجموع قياسات الزوايا المُمثّلة للصفوف الأربعة بدلالة x (مقدرة بالدرجات) ؟ $\frac{7x}{4}+x+\frac{3x}{4}+x=\frac{9x}{2}$

2) ما قياسات الزوايا الممثلة للقطاعات الخمسة ؟

المجموع السابق يساوي: $270^\circ = \frac{9x}{2}$ ومنه: $x=60^\circ$

قياسات الزوايا الممثلة للقطاعات الخمسة هي: 45° ، 60° ، 90° ، 60° ، 105°

3) إذا كان مجموع عدد التّلاميذ مساوياً 240 تلميذاً ، فأوجد عدد التّلاميذ في كل صف.

عدد تلاميذ الصف الخامس = $\frac{105}{360}\times 240=70$ تلميذاً

عدد تلاميذ الصف السادس = $\frac{60}{360}\times 240=40$ تلميذاً

عدد تلاميذ الصف السابع = $\frac{90}{360}\times 240=60$ تلميذاً

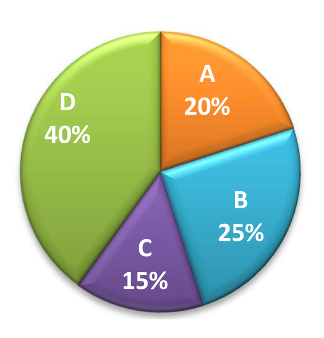
عدد تلاميذ الصف الثامن = $\frac{60}{360}\times 240=40$ تلميذاً

عدد تلاميذ الصف التاسع = $\frac{45}{360}\times 240=30$ تلميذاً

حاول أن تحل

يدلُّ الشّكل المجاور على عدد القرّاء لأربع صحف محلية D , C , B , A.
فإذا كان عددُ قراء الصحف الأربع هو 20 ألفاً، فأوجد عدد قُرّاء كل صحيفة.

الحل



النِّسبة المئوية التي تدل على عدد قُرّاء الصحيفة A هي $\frac{72}{360}=\frac{1}{5}=20\%$

النِّسبة المئوية التي تدل على عدد قُرّاء الصحيفة D هي:

$$100\%-(20\%+25\%+15\%)=100\%-60\%=40\%$$

عدد قُرّاء الصحيفة A: آلاف $20\%\times 20=\frac{1}{5}\times 20=4$

عدد قُرّاء الصحيفة B: آلاف $25\%\times 20=\frac{1}{4}\times 20=5$

عدد قُرّاء الصحيفة C: آلاف $15\%\times 20=\frac{3}{20}\times 20=3$

عدد قُرّاء الصحيفة D: آلاف $40\%\times 20=\frac{4}{10}\times 20=8$

5 - 1 تسجيل البيانات وتنظيمها



نشاط 1

يطلبُ مدرسُ الرّياضيّات إلى طلابه أن يكتبَ كلّ منهم عدداً أوليّاً أصغر من (20) على بطاقة، ثُمَّ يجمع المدرس هذه البطاقات وينظّمها في الجدول الآتي:

إجابة مقترحة

19	17	13	11	7	5	3	2	المفردة (العدد الأوّلي)
3	1	1	3	2	8	2	0	التكرار

ثُمَّ يحسبُ الطالبُ كلاً من:

المدى ، المتوسّط الحسابي ، المنوال ، الوسيط.

المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \dfrac{0\times 2+2\times 3+8\times 5+2\times 7+3\times 11+13+17+3\times 19}{20} = 9$

المنوال = $M = 5$ الوسيط هو: $\tilde{x} = \dfrac{5+7}{2} = 6$

نشاط 2

في أحد اختبارات مادة الهندسة في الصّف التّاسع الأساسي كانت درجات (35) طالباً كالآتي (الدرجة من 30):

16	26	19	17	9	24	30	22	19	11	21	16
23	18	15	13	15	17	11	8	27	19	17	29
10	19	15	24	12	22	18	20	18	16	5	

والمطلوب تنظيمُ هذه الدرجات في جدول تكراريّ ذي فئات (طول الفئة =5).

الحل:

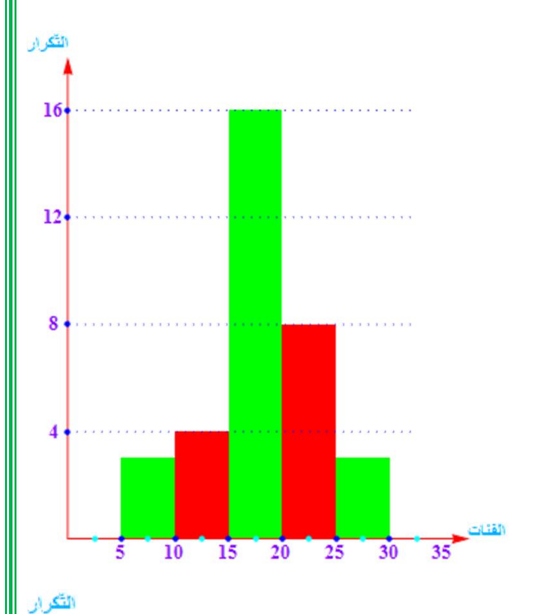
أكمل ما يأتي:

المدى =30−5=25 ، طول الفئة = 5

التكرار	العلامات	الفئات
3	|||	من 5 إلى أقل من 10
5	卌	من 10 إلى اقل من 15
16	卌 卌 卌 |	من 15إلى أقل من 20
7	卌 ||	من 20 إلى أقل من 25
4	||||	من 25 إلى 30

يُختصرُ الجدولُ السّابق بالجدول الآتي:

الفئات	5 –	10 –	15 –	20 –	25 – 30
التكرار	3	5	16	7	4



رمّزنا إلى الفئة الأولى (من 5 إلى أقل من 10) بالرمز – 5

وتضمّ في هذا المثال الدرجاتِ 9 ، 8 ، 5 .

رمّزنا إلى الفئة الثانية (من 10 إلى أقل من 15) بالرمز – 10

وتضمُّ في هذا المثال 12 ، 10 ، 11 ، 13 ، 11

والمدرجُ التّكراري المجاور يُمثّلُ البيانَ الإحصائيّ السابق.

المُضـــــلّع التّكـــــراري

لاحظ النّقط: A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 وهي منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات المرسومة في المدرج التكراري، نصل بالمسطرة بين هذه النّقط على التتالي، وللحصول على مضلع مغلق نعتبر وجودَ فئةٍ تسبقُ الفئةَ الأولى هي – 0 مركزها 2.5 وتمثَّل بالنّقطةِ A_0، وكذلك الفئة التي تلي الفئةَ الأخيرة هي – 30 مركزها 32.5 وتمثل بالنّقطة A_6.

ثُمَّ نصلُ بين A_1, A_0 ، وكذلك بين A_6, A_5 لنحصلَ على المُضلّع التّكراري $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

معلومة

إنّ مساحةَ المدرّج التّكراري تساوي مساحةَ المضلّع التكراري.

المثلثان A_1BC , CDA_0 فيهما $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$

$DA_0 = A_1B$ عملاً

$D\hat{A_0}C = C\hat{A_1}B$ بالتبادل

فالمثلثان متطابقان حسب الحالة (زاوية ، ضلع ، زاوية)

ومن التطابق ينتج أن مساحة المستطيل الذي بعداه DN ، BD تساوي مساحة شبه المنحرف A_1A_0NM

بالطريقة ذاتها يتم البرهان على تطابق المثلثات الموجودة داخل المستطيلات وخارجها. بذلك يتم المطلوب.

تـــــذكّر

- **مركز الفئة هو المتوسّط الحسابي لحدّي الفئة.**
- **المتوســـط الحســـابي لبيـــانٍ إحصـــائي ذي جـــدول تكراري فئوي يساوي**

$$\frac{\text{مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

حاول أن تحل

يُبيِّن الجدول الآتي أعمار 300 طالب بحسب سني عمر كل منهم:

العمر بالسنة	– 10	– 12	– 14	– 16	– 18
عدد الطّلاب	25	70	100	90	15

1) أوجدِ المتوسّط الحسابي لأعمار الطّلاب.
2) ارسمِ المدرج التكراري، المُضلّع التكراري.
3) استخدمِ المُضلّع التّكراري لمعرفةِ عددِ الطّلاب الذين عُمرُ كلٍّ منهم 12 سنة تقريباً.

الحل:

1) المتوسط الحسابي: نشكل الجدول:

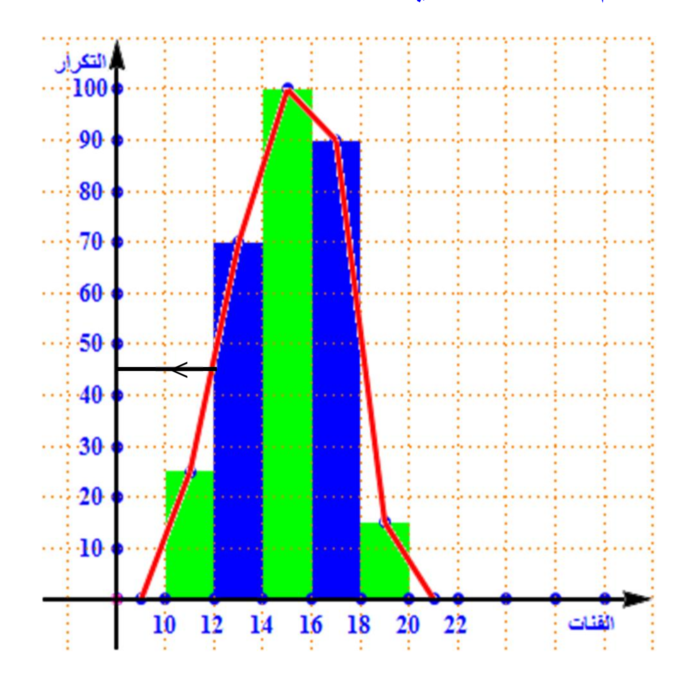


مركز الفئة	11	13	15	17	19
التكرار	25	70	100	90	15

$$\bar{x} = \frac{11\times 25 + 13\times 70 + 15\times 100 + 17\times 90 + 19\times 15}{300} = 15$$

2) المدرج التكراري، المضلع التكراري

3) عدد الطلاب الذين عمر كل منهم 12 سنة يساوي 45 تقريباً.





مخطـــــط الانتشـــــار وخـــط الاتجـــاه العـــام

6 - 1





سوف تتعلّم

استخدام مخطط الانتشار وخط الاتجاه العام.

تمهيد

ضع إشارة ✓ أمام العبارة الصحيحة وإشارة ✗ أمام العبارة الغلط في كلّ ممّا يأتي:

1) يُوجدُ ارتباط بين درجات مجموعة من الطّلاب في مادة التاريخ ودرجاتهم في مادة التربية الرياضية . ✗

2) يُوجدُ ارتباط بين طول نصف قطر الدائرة و محيطها. ✓

3) يُوجدُ ارتباط بين وزن السيارة وعمر سائقها. ✗

4) يُوجدُ ارتباط بين ازدياد مساحة سطح التماس لحذاء المتزلج ونقصان مقدار انغماس الحذاء بالثلج . ✓

نستنتج أنّ بعض الحوادث ترتبط بغيرها، وبعضُها مستقلّ. وسندعم هذا التمهيدَ بالأنشطة الآتية:

تـــــذكّر

مخطّــط الانتشـــار: رســمٌ بيــانيٌّ يعــرض مجمــوعتين مــن البيانـات علــى هيئــة أزواج مرتبــة يســاعد علــى الحكــم علــى ارتبــاط المجموعتين أو عدم ارتباطهما.

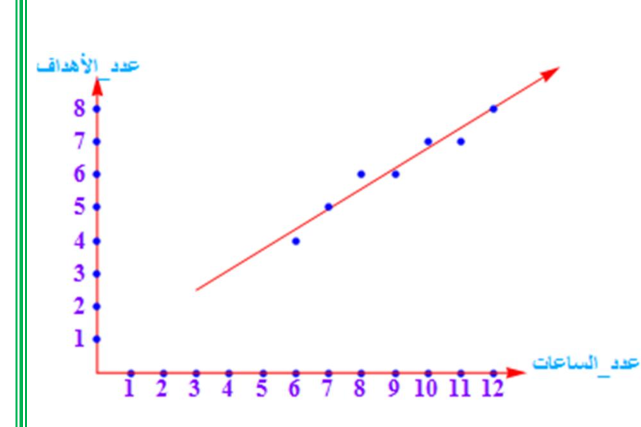


نشــــاط1

يدلُّ الجدول الآتي على عدد الأهداف في ضربات الجزاء(من أصل 10 ضربات) مُقابلَ عدد ساعات التّدريب في كرة القدم لـ 7 لاعبين.

عدد الساعات	6	7	8	9	10	11	12
عدد الأهداف	4	5	6	6	7	7	8

إن مُخطّط الانتشار لهذا البيان هو:



نلاحـظُ أنّـه عنـدما يـزداد عـدد سـاعات التـدريب يـزداد عـدد الأهداف.

نقـولُ إنّ لهـذا البيـان الإحصـائي نزعـةً (ارتباطـاً) وإنّ هـذه



النّزعةَ(الارتباط) ذات اتجاه عام موجب

المستقيم المرسوم هو خطُّ الاتجاه العام.

تعلّم

إذا كان خطّ الاتجاه العام مستقيماً:

1) وكانت الزاويةُ بين المحور الأفقي وخطّ الاتجاه العام حادةً، فإنّ النزعة ذات اتجاه عامّ موجب.

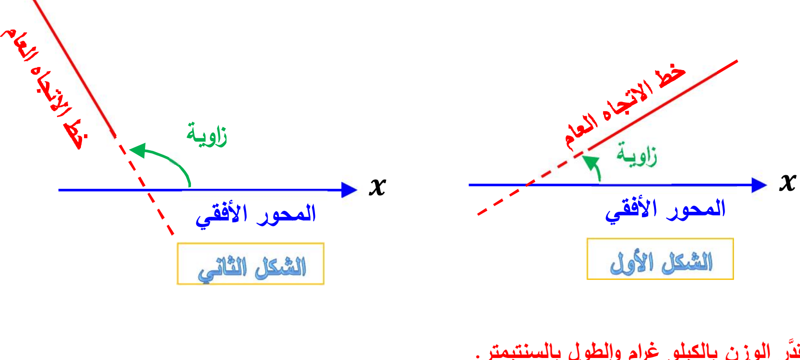
2) وكانت الزاويةُ بين المحور الأفقي وخطّ الاتجاه العام منفرجة، فإنّ النزعة ذات اتجاه عام سالب.

ملاحظة

الشّكلان المجاوران يُوضّحان

الزاويةَ المحصورة بين المحور الأفقي

وخطّ الاتجاه العام



تطبيق

يُوضّح الجدول الآتي مجموعتين من

البيانات (أوزان وأطوال لتسعة أشخاص): يُقدَّر الوزن بالكيلو غرام والطول بالسنتيمتر.

الوزن	50	55	60	65	65	70	70	75	75
الطول	150	156	155	158	163	166	165	170	166

أ. مثّل مُخطّط الانتشار.

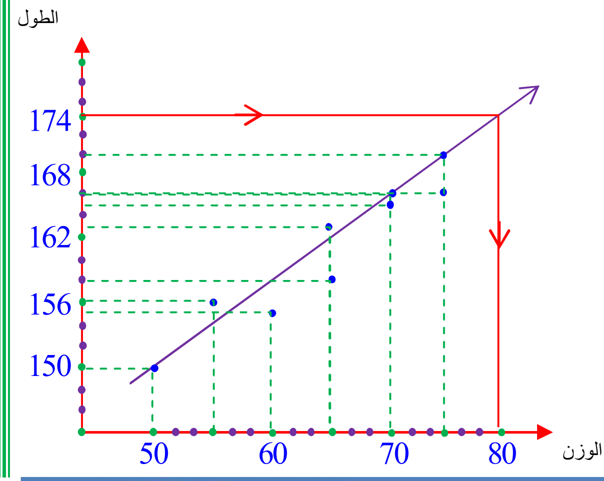
ب. ارسمْ خطَّ الاتجاه العام، ثُمَّ صف نوع الاتجاه.

ج. استخدمْ مُخطّط الانتشار لتوقُّع وزن شخص طوله $174\ cm$.

د. إذا افترضنا أنّ x المتوسّط الحسابي لأوزان الأشخاص. و y المتوسّط الحسابي لأطوالهم.

فأوجدْ x, y ثُمَّ مثل (x, y) ، هل النّقطة ذات الإحداثيين (x, y) قريبةٌ من خطّ الاتجاه العام ؟

الحل



أ. إنّ مُخطّط الانتشار هو المرسوم جانباً.

ب. إنّ المستقيمَ المرسومَ هو خطُّ الاتجاه العام

وهو ذو اتجاه موجب.

ج. نحدد $174\ cm$ على المحور العمودي (الأطوال) ونتحرك

بخط موازٍ للمحور الأفقي حتى يتقاطع مع خط الاتجاه

العام، ونرسمُ موازياً للمحور العمودي يقطع المحور الأفقي

(هو وزن الشخص)، فالشخص الذي طوله $174\ cm$ نتوقع وزنه 80 كيلوغرام (تقريباً).

د. المتوسّط الحسابي لأوزان الأشخاص:

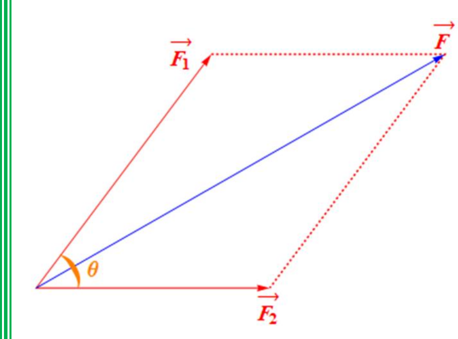
$$x = \frac{50 + 55 + 60 + 65 + 65 + 70 + 70 + 75 + 75}{9} = 65$$

المتوسّط الحسابي لأطوال الأشخاص:

$$y = \frac{150 + 156 + 155 + 158 + 163 + 166 + 165 + 170 + 175}{9} = 162$$

النّقطة الممثلة للزوج المرتب $(x, y) = (65,162)$ قريبةٌ من خط الاتجاه العام.

حاول أن تحل



يدلُّ الجدول الآتي على:

F شدّة محصلة قوتين متلاقيتين $(F_2 = 3N\ ,\ F_1 = 4N)$،

θ قياس الزاوية المحصورة بين حاملي القوتين $\vec{F_1}\ ,\ \vec{F_2}$.

(الرمز θ يُقرأ ثيتا، والرمز N يدلُّ على وحدة قياس شدة القوة _نيوتن_)

θ	30°	45°	60°	90°	120°
F	6.8	6.5	6.1	5	3.6

1) كوّن مُخطّط الانتشار، ثُمَّ ارسم خط الاتجاه العام، صف هذا الاتجاه.

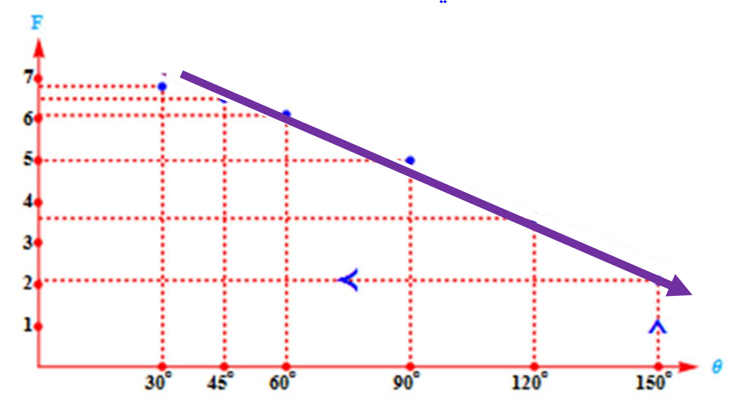
2) استخدم مُخطّط الانتشار لتوقُّع شدّة محصلة قوتين من أجل زاوية قياسها $\theta = 150^{\circ}$.

الحل:

1) مخطط الانتشار.

2) حدد زاوية قياسها $\theta = 150^{\circ}$ على المحور الأفقي، وتحرك بخط أفقي موازٍ للمحور العمودي حتى يتقاطع مع خط الاتجاه العام، ثُمّ ارسم موازياً للمحور الأفقي، يقطع المحور العمودي في نقطة.

شدة محصلة قوتين من أجل زاوية $\theta = 150^{\circ}$ هي تقريباً: $2.1\,N$



تمرينات الوحدة

1) دلَّ على الإجابة الصحيحة فيما يأتي (إجابة واحدة فقط صحيحة):

أ) يدلُّ الجدول الآتي:

x	30°	40°	.....	.....	.....
y	60°	50°	.....	.....	.....

x قياس زاوية حادة، y متمّمتها، فإنّ خط الاتجاه العام:

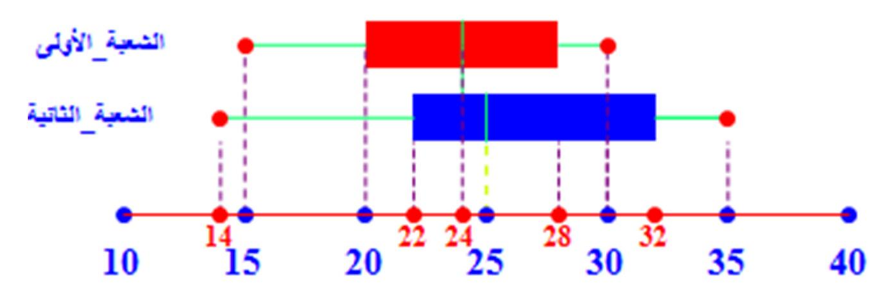
C) لا اتجاه B) سالب A) موجب

ب) لدينا خمسةُ أعداد، المتوسّط الحسابي للعددين الأوّل والثاني 12

والمتوسّط الحسابي للأعداد الثلاثة الباقية 22 ، فيكون المتوسّط الحسابي لهذه الأعداد الخمسة مساوياً:

D) 18 C) 16 B) 15 A) 12

حـ) يدلُّ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين الآتي على توزيع درجات شعبتين في مادة العلوم (الدرجة من 40).



1. مدى درجات الشّعبة الأولى يساوي: D) 21 C) 15 B) 10 A) 8
2. مدى درجات الشّعبة الثّانية يساوي: D) 21 C) 15 B) 10 A) 8
3. المدى الرُّبيِّعي لدرجات الشّعبة الأولى يساوي: D) 21 C) 15 B) 10 A) 8
4. المدى الرُّبيِّعي لدرجات الشّعبة الثّانية يساوي: D) 21 C) 15 B) 10 A) 8
5. الرُّبيِّع الأدنى لدرجات الشّعبة الأولى يساوي: D) 32 C) 28 B) 22 A) 20
6. الرُّبيِّع الأعلى لدرجات الشّعبة الأولى يساوي: D) 32 C) 28 B) 22 A) 20
7. الرُّبيِّع الأدنى لدرجات الشّعبة الثّانية يساوي: D) 32 C) 28 B) 22 A) 20
8. الرُّبيِّع الأعلى لدرجات الشّعبة الثانية يساوي: D) 32 C) 28 B) 22 A) 20

2) يدلُّ الجدول الآتي على المبيعات الشهرية بآلاف الليرات السورية لكل من أسامة وعلي في ستة أشهر متتالية:

أسامة	20	22	24	26	38	50
علي	16	18	20	28	48	56

أ) أوجد المتوسّط الحسابي والوسيط لمبيعات كلّ من أسامة وعلي.

ب) أنشئ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين لمبيعات كلّ من أسامة وعلي.

الحل:

أ) المتوسط الحسابي لمبيعات أسامة هو :

$$\bar{x} = \frac{20+22+24+26+38+50}{60} = 30$$

وسيط مبيعات أسامة: $\tilde{x} = 25$

المتوسط الحسابي لمبيعات علي هو :

$$\bar{x} = \frac{16+18+20+28+48+56}{6} = 31$$

وسيط مبيعات علي: $\tilde{x} = 24$

ب) لرسم مخطط الصندوق والساعدين لمبيعات أسامة نحسب:

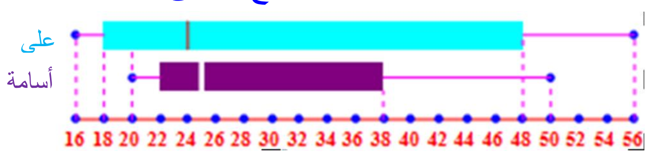
أصغر مفردة= 20 ، الوسيط = 25

أكبر مفردة = 50 ، الربيع الأدنى = 22 ، الربيع الأعلى = 38

لرسم مخطط الصندوق والساعدين لمبيعات علي نحسب:

أصغر مفردة= 16 ، الوسيط = 24

أكبر مفردة = 56 ، الربيع الأدنى = 18 ، الربيع الأعلى = 48



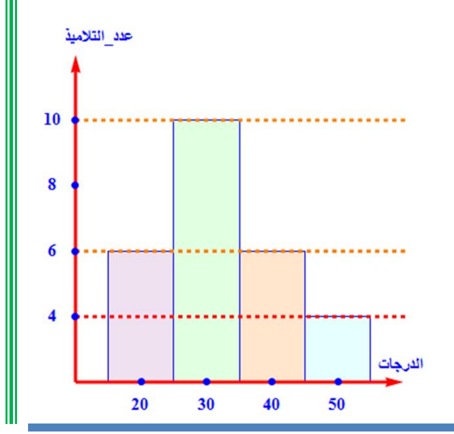
3) الدرجات المُوضّحة في المدرج التّكراري هي مراكز الفئات

لاختبار مادة الرّياضيّات في إحدى شعب الصّف التّاسع الأساسي:

أ) أوجد عدد تلاميذ هذه الشّعبة.

ب) ما طول الفئة ؟ وما الفئة الأكثر تكراراً ؟

ح) أوجد المتوسّطَ الحسابي لدرجات الشّعبة.



الحل:

أ) عدد تلاميذ الشعبة هو: $6 + 10 + 6 + 4 = 26$

ب) من الشكل: طول الفئة = البعد بين مركزي فئتين متتاليتين أي: $30 - 20 = 10$

الفئة الأكثر تكراراً مركزها 30.

الحد الأدنى لهذه الفئة $30 - 5 = 25$

الحد الأعلى لهذه الفئة $30 + 5 = 35$

الفئة المنوالية الأكثر تكراراً $25 -$

د) $\bar{x} = \frac{20\times6+30\times10+40\times6+50\times4}{26} = \frac{120+300+240+200}{26} \simeq 33.2$

4) تدل البيانات الآتية على علامات التّلاميذ الأوائل في الأولمبياد العلمي للصف العاشر في إحدى المحافظات:

91 ، 86 ، 89 ، 88 ، 89 ، 85 ، 88

أ) ارسم تمثيلاً نقطياً لهذه البيانات (التمثيل البياني بالنقاط المجمعة).

ب) أوجد كلاً من: الوسيط، المتوسّط الحسابي، المنوال، المدى.

د) أنشئ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين.

الحل:

أ)

85 86 88 89 91

ب) نرتب البيانات تصاعدياً: 85 ,86 ,88 ,88 ,89 ,89 ,91

الوسيط هو: $\tilde{x} = 88$

المتوسط الحسابي هو: $x = \frac{85+86+2\times88+2\times89+91}{7} = \frac{616}{7} = 88$

للبيان منوالان هما 88 ، 89 ، المدى: $R = 91 - 85 = 6$

د) أصغر مفردة هي: 85 ، $\tilde{x} = 88$ ، أكبر مفردة هي: 91

الربيع الأدنى يساوي: 86 الربيع الأعلى يساوي: 89



5) يدلُّ الجدول الآتي على عدد الكتب المستعارة من مكتبة المدرسة في أسبوع.

الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الاثنين	الأحد	الأيام
20	40	60	40	20	عدد الكتب

مثّل هذه البياناتِ بالقطاعات الدائريّة.

الحل:

أكمل ما يأتي:

عدد الكتب $180 = 20 + 40 + 60 + 40 + 20$ ، فيكون:

– قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل عدد الكتب المستعارة يوم الأحد $\frac{20}{180} \times 360^\circ = 40^\circ$

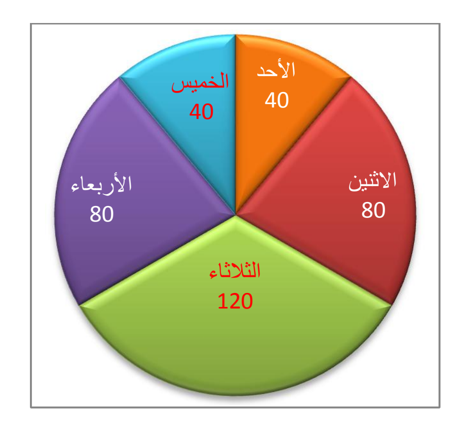
– قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل عدد الكتب المستعارة يوم الاثنين $\frac{40}{180} \times 360^\circ = 80^\circ$

– قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل عدد الكتب المستعارة يوم الثلاثاء $\frac{60}{180} \times 360^\circ = 120^\circ$

– قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل عدد الكتب المستعارة يوم الأربعاء $\frac{40}{180} \times 360^\circ = 80^\circ$

– قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل عدد الكتب المستعارة يوم الخميس $\frac{20}{180} \times 360^\circ = 40^\circ$

أكمل رسم القطاعات الدائرية.



الأعـــــــــداد الأوليــــــــــة

مُـــــنظِّم الــــــدّرس

أهداف الدّرس

يتعرف الأعداد الأولية

مُفردات جديدة

طريقة ايراتوستين

مُستلزمات الدّرس

بطاقات رُسِم عليها جدول المئة – السّبورة.

ســـــير الــــــدّرس

التّمهيـــــــد

اكتب عنوان الدرس على السبورة،

اطلب تعريف العدد الأولي،

اسأل متى يقبل العدد القسمة على كل من الأعداد **1 – 2 – 3**

اطلب تعريف العدد الأولي

اسأل هل العدد **1** أولي ولماذا ؟ ثم اسأل عن العدد **2** ثُمّ العدد **0**

اذكر: بعد أنْ تعرفت العدد الأولي نريد الآن معرفة الأعداد الأولية الأقل من مئة

التّعلـــيم والــتّعلُّم

- وزع البطاقات التي رسم عليها جدول المئة على المجموعات ثم اطلب منهم تنفيذ النشاط صفحة **(29)**
- اكتب الأعداد التي لم يتم شطبها من الجدول على السبورة

  واذكر لهم أنّ هذه الأعداد هي الأعداد الأولية الأقل من مئة



ثُمّ اذكر: لسهولة الحصول على الأعداد الأولية يمكنك استخدام الجدول في الصفحة (29)

ويرسم المدرس الجدول ويوضحه.

- كلف المجموعات بتنفيذ النشاط صفحة (30)

بعد أن تُنهي المجموعات عمالها يذكر المدرّس الآتي:

من أجل العدد **14** وجدنا له عاملاً أوليّاً مُربّعه أقل منه.

من أجل العدد **21** وجدنا له عاملاً أوليّاً مُربّعه أقل منه.

من أجل العدد **30** وجدنا له عاملاً أوليّاً مُربّعه أقل منه.

من أجل العدد **91** وجدنا له عاملاً أوليّاً مُربّعه أقل منه.

نقبل صحّة ذلك على أيّ عدد غير أوليّ

- اعرض التّعلم ثُمّ اطلب من المجموعات تنفيذ التّطبيق **(1)** صفحة **(30)**

ثُمّ تنفيذ التّطبيق **(2)** صفحة**(30)**

الخاتمـــة والتقـــويم

- التحقق من الفهم:

اسأل هل يوجد عددان أوليان متتاليان أكبر من **5**

الجواب: لا لأنّ العددان المتتاليان الأكبر من **5** أحدهما عدد زوجي و هو غير أولي

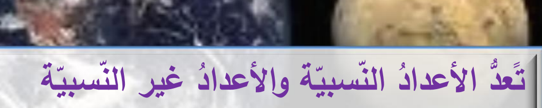
قال احدهم: إنّ العدد الأعداد **5**، **1**، **–5**، **–1**، هي قواسم للعدد **5** فالعدد **5** ليس أولي ما رأيك بهذا القول.

تمـــــــــــــــرّن

اختر تمارين مناسبة من كتاب الطّالب وكتاب الأنشطة والتّدريبات ليقوم الطّلاب بحلها كوظيفة منزليّة.







محتوى الوحدة

1. الأعدادُ الأولية.
2. العاملُ المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.
3. جمعُ الأعداد النسبية وطرحها.
4. ضربُ الأعداد النسبية وقسمتها.
5. الأعدادُ غير النسبية.

تَعدُّ الأعدادُ النّسبيّة والأعدادُ غير النّسبيّة المدخلَ المناسب لتعرُّف الأعداد الحقيقيّة بما فيها من مضاعف مشترك وعوامل، وبما تتضمّنه من عملياتِ جمعٍ وطرحٍ وضربٍ وقسمةٍ، وهي مقدّمة للتّعامل مع الأعداد غير النّسبيّة. وقد تمَّ العرضُ بتدرجٍ مناسبٍ يُساعدُ الطّالبَ على الفهم مع وجود تطبيقات حياتية ملائمة تُعطي المزيد من الفائدة.

لمحة تاريخيّة

تمكّن العالم الرياضي غياث الدّين الكاشي من إيجاد قيمة تقريبيّة للعدد π مقرّبة إلى 16 رقماً فوجد أنّ:

$$\pi = 3.1415926535898732$$

وكتبَ الجملة الشّهيرة هنا وهناك و هنالك إسطرلابان قد انتظما يريان شكل عطارد.

التي تدلُّ على قيمة العدد π بعشرةِ أرقامٍ عشريةٍ إذ يُعبِّرُ عددُ حروف كلّ كلمة عن منزلة عشرية من قيمة π.

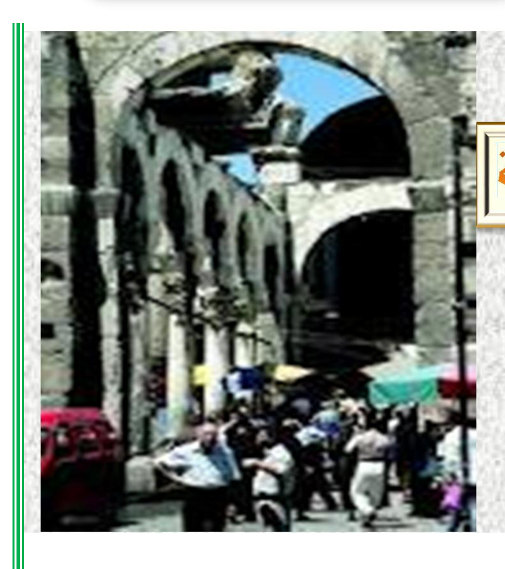
حيث تدلُّ:

هنا على الرقمِ 3 .

و على الرقمِ 1 .

هناك تدلُّ على الرقمِ 4 . وهكذا... ثُمَّ الفاصلة على يمين أوّل 3 .





2 - 1

الأعـــــــــــداد الأوليـــــــــــــة



سوف تتعلّم

1. الأعداد الأولية.
2. إيجاد العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.



الأعـــداد الأوليّــــة الأقـــلّ مـــن 100

نشـــــــاط

(طريقة إيراتوستين في إيجاد الأعداد الأوليّة) كما يأتي:

انقلِ الجدولَ المجاور إلى دفترك ثُمَّ نفّذ الآتي:

1. اشطبْ مضاعفات العدد 2 عدا العدد 2.

تعلمتَ سابقاً أنّ العدد 2 عدد أولي، ومضاعفاتِه أعدادٌ غير أولية.

2. اشطبْ مضاعفات العدد 3 عدا العدد 3.
3. على غرارِ الخطوةِ السّابقة نفّذ ذلك من أجل الأعداد 5 ، 7.

تذكّر

العدد الأولي هو كل عدد طبيعي أكبر من 1 وله عاملان مختلفان هما العدد 1 والعدد ذاته

10	9	8	7	6	5	4	3	2	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

إيراتوستين (267 – 194 ق.م)

عالم يوناني فلكي

توصل إلى حساب قياس محيط الأرض

له مؤلفات في الرياضيات والفلك.

اكتشف خوارزمية لإيجاد الأعداد الأولية، وتُسمّى غربال إيراتوستين

أكمل ما يأتي:

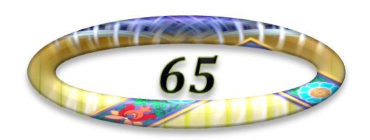
الأعداد التي لم تُشطَب في الجدول هي الأعداد الأوليّة الأقل من 100

وهي: 2 ، 3 ، 5 ، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47، 53، 59، 61، 67، 71، 73، 79، 83، 89، 97

ويمكنُ وضع الأعداد الأوليّة بدءاً من العدد 5 وفق النمطين الآتيين:

$6n-1$	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	...
$6n+1$	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103	...

الأعداد الملوّنة بالأحمر هي ناتجُ ضرب أعداد أولية، فهي ليست أعداداً أوليةً.



الأعـــــــداد الأوليـــــــة

نشاط

أوجدْ عاملاً أوّليّاً y للعدد 14 (غير الأولي) يُحقّق العلاقة $y^2 \leq 14$.
أوجدْ عاملاً أوّليّاً y للعدد 21 (غير الأولي) يُحقّق العلاقة $y^2 \leq 21$.
أوجدْ عاملاً أوّليّاً y للعدد 30 (غير الأولي) يُحقّق العلاقة $y^2 \leq 30$.
أوجدْ عاملاً أوّليّاً y للعدد 91 (غير الأولي) يُحقّق العلاقة $y^2 \leq 91$.

تعلّم

- مبرهنة: كل عدد طبيعي x غير أولي وأكبر من 1، يقبل على الأقل عاملاً أولياً y يحقق $y^2 \leq x$.
- نتيجة: إذا كان x عدداً طبيعياً أكبر من 1، وكان x لا يقبل أي عامل أولي y يحقق $y^2 \leq x$ فإن x أولي.

تطبيق ①

بيِّن فيما إذا كان العدد 143 أوّليّاً أم غير أولي.

الحل

نقسِّم العدد 143 على الأعداد الأوليّة التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي: 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11

(لا نختبر العدد 13 لأنّ: $13^2 > 143$).

إنّ العدد 143 لا يقبلُ القِسمة على أيّ من 2 ، 3 ، 5 (علِّل)

هل يقبلُ العدد 143 القِسمة على العددِ 7 أو العدد 11 ؟

لاحظ أنّ $143 = 7 \times 20 + 3$ الباقي ليس صفراً، فالعدد 7 ليس عاملاً أوّليّاً للعدد 143.

$143 = 11 \times 13 + 0$ الباقي صفر فهو يقبلُ القِسمة على 11 من دون باقٍ، أي أنّ 11 عاملٌ أوليٌّ للعدد 143.

نستنتجُ أنّ العدد 143 ليس أوّليّاً.

تذكّر

1. إنّ ناتج قسمة العدد 20 على العدد 5 يساوي 4 والباقي صفر.
   ونعبِّر عن ذلك:
   $20 = 5 \times 4 + 0$
2. إنّ ناتج قسمة العدد 21 على العدد 5 يساوي 4 والباقي 1.
   ونعبِّر عن ذلك:
   $21 = 5 \times 4 + 1$

تطبيق ②

هل العدد 173 أوليّ أم غير أولي ؟

الحل: نقسم العدد 173 على الأعداد الأوليّة التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي:

2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 (لا نختبر العدد 17 لأنّ: $17^2 > 173$).

إنّ العدد 173 لا يقبلُ القِسمة على أيّ من 2 ، 3 ، 5 (علّل).

هل يقبلُ العدد 173 القِسمة على العددِ 7 أو على العددِ 11 أو على العددِ 13 ؟

لاحظ أنّ $173 = 7 \times 24 + 5$ ، الباقي ليس صفراً ، فالعدد 7 ليس عاملاً أوّليّاً للعدد 173

$173 = 11 \times 15 + 8$ ، الباقي ليس صفراً.

$173 = 13 \times 13 + 4$ ، الباقي ليس صفراً. نستنتجُ أنّ العدد 173 عددٌ أولي.

تطبيق 3

هل العدد 307 أولي أم غير أولي ؟

الحل

نقسم العدد 307 على الأعداد الأوليّة التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي:

2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11، 17 (لا نختبر العدد 19 لأنّ: $19^2 > 307$).

إنّ العدد 307 لا يقبلُ القِسمة على أيّ من 2 ، 3 ، 5 (علّل).

هل يقبلُ العدد 307 القِسمة على العددِ 7 أو على العددِ 11 أو على العددِ 13 أو على العددِ 17 ؟

لاحظ أنّ $307 = 7 \times 43 + 6$ ، الباقي ليس صفراً.

$307 = 11 \times 27 + 10$ ، الباقي ليس صفراً.

$307 = 13 \times 23 + 8$ ، الباقي ليس صفراً.

$307 = 17 \times 18 + 1$ ، الباقي ليس صفراً.

نستنتجُ أنّ العدد 307 عدد أولي.

حاول أنّ تحلّ

بيّن فيما إذا كان كلّ من الأعداد الآتية أوّليّاً أم غير أولي: 815 ، 919 ، 713.

الحل:

1. نقسم العدد 713 على الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي:

2,3,5,7,11,19,23 (ولا نختبر العدد 29 لأنّ: $(29)^2 > 713$).

هل يقبل 713 القسمة على كلّ من الأعداد 7 أو 11 أو 13 أو 17 أو 19 و 23

لاحظ أنّ: $713 = 7 \times 101 + 6$ والباقي ليس صفراً.

$713 = 11 \times 64 + 9$ والباقي ليس صفراً.

$713 = 13 \times 54 + 11$ والباقي ليس صفراً.

$713 = 17 \times 41 + 16$ والباقي ليس صفراً.

$713 = 19 \times 37 + 10$ والباقي ليس صفراً.

$0 + 31 \times 23 = 713$ والباقي صفر إذن 713 ليس أولياً.

.2 919 لا يقبل القسمة على 2 لأن آحاده ليس عدداً زوجياً.

919 لا يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه ليس من مضاعفات العدد 3.

919 لا يقبل القسمة على 5 لأن آحاده ليس صفراً أو 5.

نقسم العدد 919 على الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي:

2,3,5,7,19,23,29 (ولا نختبر العدد 31 لأنّ: $(31)^2 > 919$).

لاحظ أنّ: $919 = 7 \times 131 + 2$ والباقي ليس صفراً فالعدد 7 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 11 \times 83 + 6$ والباقي ليس صفراً فالعدد 11 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 13 \times 70 + 9$ والباقي ليس صفراً فالعدد 13 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 17 \times 54 + 1$ والباقي ليس صفراً فالعدد 17 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 19 \times 48 + 7$ والباقي ليس صفراً فالعدد 19 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 23 \times 39 + 22$ والباقي ليس صفراً فالعدد 23 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

$919 = 29 \times 31 + 20$ والباقي ليس صفراً فالعدد 29 ليس عاملاً أوليّاً لـ 919.

إذن 919 عدد أولي.

.3 815 ليس عدد أولي لأن آحاده 5 فهو يقبل القسمة على 5.

العامـــــل المشـــــترك الأكـــبر

مثال

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين 204 ، 792

نكتبُ العدد 204 بدلالة عوامله الأوليّة على النّحو الآتي: $204 = 2^2 \times 3 \times 17$

ونكتبُ العدد 792 بدلالة عوامله الأوليّة على النّحو الآتي: $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$

إذن العامل المشترك الأكبر للعددين يساوي 12.

طريقة إقليدس لإيجاد العامل المشترك الأكبر لعددين

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين 204 ، 792 تابع سلسلة عمليات القِسمة الآتية:

- نقسِّم العدد الكبير 792على العددِ الصّغير 204 فيكون باقي القِسمة 180 ونكتبُ $792 = 204 \times 3 + 180$
- نقسِّم المقسوم عليه 204 على باقي القِسمة 180 ونكتبُ $204 = 180 \times 2 + 24$
- نكرِّر هذا العمل حتى نحصل على قسمة يكون الباقي صفراً

$180 = 24 \times 7 + 12$

$24 = 12 \times 2 + 0$

إنّ آخرَ باقٍ غير معدوم هو العامل المشترك الأكبر للعددين ويساوي 12، وتُسمّى هذه الطّريقة (طريقة إقليدس)

ويمكن اختصارُ الحلّ السّابق بالجدول الآتي:

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
180	204	792
24	180	204
12	24	180
0	**12**	24

إنّ العامل المشترك الأكبر للعددين 204 ، 792 هو آخرُ باقٍ غير معدوم ويساوي **12**.

تعلّم

- العامل المشترك الأكبر لعددين طبيعيّين غير معدومين هو آخر باقٍ غير معدوم لسلسلة عمليات القسمة في طريقة إقليدس.

تطبيق

أوجدِ العاملَ المشترك الأكبر للعددين 575 ، 215.

الحل: ننظّمُ الجدول الآتي:

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
145	215	575
70	154	215
5	70	145
0	5	70

إنّ العامل المشترك الأكبر للعددين 575 ، 215 هو آخر باقٍ غير معدوم في سلسلة عمليات القِسمة وهو 5.

حاول أنْ تحلّ

1. أوجدِ العاملَ المشترك الأكبر للعددين 285 ، 450 بالطّريقة العمليّة (طريقة إقليدس).
2. يحوي إبريق $840cm^3$ من شراب الليمون ويحوي آخرُ $1050cm^3$ من شراب البرتقال
   نُريدُ إفراغ كلّ منهما في أكواب متساوية السعة:
   أ. ما أكبرُ سعة للكوب الواحد ؟
   ب. ما عددُ الأكواب التي يملؤها شراب الليمون ؟
   حـ. ما عددُ الأكواب التي يملؤها شراب البرتقال ؟



الحل:

1. ننظم الجدول الآتي:

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
165	285	450
120	165	285
45	120	165
30	45	120
15	30	45
0	15	30

إنّ آخر مقسوم عليه في سلسلة عمليات القسمة هو ع.م.أ للعددين (285 ، 450) وهو 15.

2. أكبر سعة للكوب الواحد هي العامل لمشترك الأكبر للعددين (840 ، 1050).

لإيجاد ع.م.أ بالطريقة العملية (طريقة إقليدس)

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
210	840	1050
0	210	840

تذكّر

1. العددان الأوليان فيما بينهما هما عددان عاملهما المشترك الأكبر هو العدد 1.
2. المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين فيما بينهما هو حاصل ضربهما.

ع.م.أ (840 ، 1050) = 210

أ. أكبر سعة للكوب الواحد هي: $210cm^3$

ب. عدد الأكواب التي يملؤها شراب الليمون هو: 210 ÷ 840 ويساوي 4 أكواب

ج. عدد الأكواب التي يملؤها شراب البرتقال هو: 210 ÷ 1050 ويساوي 5 أكواب

المضـــاعف المشـــترك الأصـــغر



1. أوجد كلاً من العامل المشترك الأكبر للعددين 238 ، 110. والمضاعف المشترك الأصغر لهما.
2. أوجد ناتج ع.م.أ × م.م.أ ، وناتج 238 × 110 ، ماذا تستنتج؟

الحل:



إنّ ع.م.أ(238 ، 110)= 2

إنّ م.م.أ(238 ، 110)= 13090

ع.م.أ(238 ، 110) × م.م.أ(238 ، 110) = 26180

إنّ 238 × 110= 26180

نستنتج أن ع.م.أ(238 ، 110) × م.م.أ(238 ، 110) = 238 × 110

تعلّم

جداء عددين يساوي جداء العامل المشترك الأكبر لهما بالمضاعف المشترك الأصغر.

تطبيق ①

أوجد العددين الطبيعيين $6x$, $4x$ علماً أنّ:

(ع،م،أ) لهما يساوي 12 و (م.م.أ) لهما يساوي 72.

الحل

نعلمُ أنّ: ع.م.أ للعددين × م.م.أ لهما يساوي حاصل ضرب هذين العددين.

$$4x \times 6x = 12 \times 72$$

$$24x^2 = 12 \times 72$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

فيكونُ العددُ الأولُ $4x = 4 \times 6 = 24$ ، ويكون العدد الثّاني $6x = 6 \times 6 = 36$

تطبيق ②

الأعداد 55 , 71 , 39 بواقي قسمة العدد x على كلٍّ من الأعداد 56 , 72 , 40 على التّرتيب،

أوجد أصغر قيمة للعدد x.

الحل:

بما أنّ بواقي القِسمة على التّرتيب أصغرُ من المقسوم عليه بمقدار 1

نضيف هذا المقدار إلى العدد x فنحصل على قسمة من دون باقٍ

أي أنّ:



$x+1$ يقبلُ القِسمة على 56 من دون باقٍ.

$x+1$ يقبلُ القِسمة على 72 من دون باقٍ.

$x+1$ يقبلُ القِسمة على 40 من دون باقٍ.

إذن: $x+1$ هو م.م.أ(56 و 72 و 40)

إنّ: $56=2^3\times 7$ ، $72=2^3\times 3^2$ ، $40=2^3\times 5$

فيكونُ: $x+1=$ م.م.أ $(40,72,56)$

$$3^2\times 5\times 7\times 2^3=x+1$$

$$2240=x+1$$

$x=2239$ أصغر قيمة للعدد x.

حاول أن تحلّ

أوجد أصغرَ عددٍ طبيعيٍّ n بحيث يكونُ باقي قسمته على كلٍّ من الأعداد: 19 ,21 , 35 هو 18.

الحل

إنّ: $n-18$ مضاعف للعدد 35 و $n-18$ مضاعف للعدد 19 و $n-18$ مضاعف للعدد 21.

إذن أصغر قيمة للعدد $n-18$ هي : م.م.أ للأعداد 19 ,21 , 35.

إنّ 19 عدد أولي ، $21=3\times 7$ ، $35=5\times 7$.

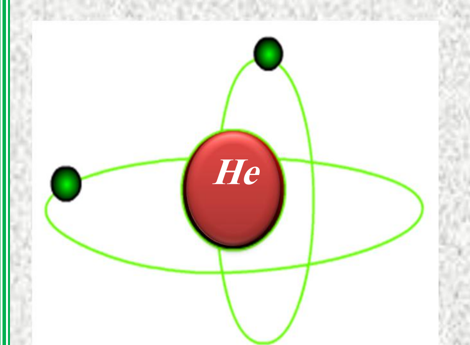
$n-18=$ م.م.أ للأعداد (19 ,21 , 35) $=3\times 5\times 7\times 19$

$$n-18=1995$$

$n=2013$ وهو العدد المطلوب.

2 - 2

الأعــــــــــداد النّســــــــــبيّة



سوف تتعلّم

1. جمع الأعداد النسبية وطرحها.
2. ضرب الأعداد النسبية وقسمتها.

جمع الأعداد النسبية وطرحها

نشــــــاط

عددان نسبيان a, b حيث $a = \frac{-5}{8}$, $b = \frac{13}{10}$ ، احسب كلاً من: $a + b$, $b - a$

الحل:

إنّ:

$$a + b = \frac{-5}{8} + \frac{13}{10}$$

$$= \frac{-25}{40} + \frac{52}{40} = \frac{27}{40}$$

إنّ:

$$b - a = \frac{13}{10} - \left(-\frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{13}{10} + \frac{5}{8} = \frac{52}{40} + \frac{25}{40} = \frac{77}{40}$$

حاول أنّ تحلّ

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

① $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{7}{6} =$, ② $\frac{63}{126} - \frac{47}{210} =$, ③ $\left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] =$

الحل:

① $\frac{3}{8}+\frac{5}{4}-\frac{7}{6}=\frac{9}{24}+\frac{30}{24}-\frac{28}{24}=\frac{39-28}{24}=\frac{11}{24}$

② $\frac{63}{126}-\frac{47}{141}=\frac{63}{2\times 63}-\frac{47}{3\times 47}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

③ $\left(3-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\left[\frac{45}{15}-\frac{3}{15}-\frac{20}{15}\right]-\left[\frac{12}{12}-\frac{20}{12}+\frac{3}{12}\right]$

$$=\frac{22}{15}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{22}{15}+\frac{5}{12}=\frac{88+25}{60}=\frac{113}{60}$$

$(4)\quad(5)$

ضرب الأعداد النسبية وقسمتها

نشـــــاط1

عددان نسبيان x,y حيث $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{-12}{5}$ احسب كلاً من: $x\cdot y$, $x\div y$

الحل:

إنّ: $x\cdot y=\frac{2}{3}\times\frac{-12}{5}=\frac{-24}{15}$

إنّ: $x\div y=\frac{2}{3}\div\frac{-12}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{12}=\frac{10}{36}$

حاول أنّ تحلّ

1- أوجد ناتج ما يأتي:

$$\frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{8-\frac{1}{5}-\frac{4}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}=$$

2- يستغرقُ صنبور ماء ساعة واحدة لملء $\frac{1}{3}$ خزّان ماء، فكم ساعةً يستغرق الصنبور لملء $\frac{5}{6}$ الخزّان ؟

الحل

1- أوجد ناتج ما يأتي:



$$\frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} \times \frac{8-\frac{1}{5}-\frac{4}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}} = \frac{\frac{54-2+5}{6}}{\frac{-20+2-3}{4}} \times \frac{\frac{80-2-4}{10}}{\frac{4-6-5}{4}}$$

$$= \frac{\frac{57}{6}}{\frac{-21}{4}} \times \frac{\frac{74}{10}}{\frac{-7}{4}} = \frac{\overset{19}{\cancel{57}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{-4}}}{21} \times \frac{\overset{37}{\cancel{74}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \times \frac{-4}{7}$$

$$= \frac{-38}{21} \times -\frac{148}{35} = \frac{5624}{735}$$

2- يستغرق صنبور ماء ساعة واحدة لملء $\frac{1}{3}$ خزان ماء، فكم ساعة يستغرق الصنبور لملء $\frac{5}{6}$ الخزان ؟.

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{\cancel{3}}{1} = \frac{5}{2} = 2.5$$ ساعة





الصورة العشرية للعدد النّسبي

نشاط

تعلّمتَ أنّ: $\frac{5}{4}=1.25$ وأنّ: $\frac{12}{50}=0.24$

نُسمّي 1.25 الصّورة العشريّة للعدد النّسبي $\frac{5}{4}$

وَ 0.24 الصّورة العشريّة للعدد النّسبي $\frac{12}{50}$ وَ كلاً من العددين النّسبيّن $\frac{5}{4}$ وَ $\frac{12}{50}$ عدداً عشرياً.

إلاّ أنّ: $\frac{8}{3}=2.6666...$ ، فعملية القِسمة غير مُنتهية وتشير النقاط إلى استمرار تكرار العدد 6،

ونختصرُ الكتابة السّابقة بالشكل: $\frac{8}{3}=2.\overline{6}$،

ونعبّر عن ذلك: الصّورةُ العشريّة للعدد النّسبي $\frac{8}{3}$ غير مُنتهية ودوريّة ودورها 6.

وبالمثلِ نجد أنّ: $\frac{2}{11}=0.181818....=0.\overline{18}$ غير مُنتهية ودوريّة ودورها 18.

نقبل أنّ مجموعةَ الأعدادِ النسبيّة تتألف من:
1. أعدادٍ نسبيّة لكلّ منها صورةٌ عشريّة مُنتهية
2. أعدادٍ نسبيّة لكلّ منها صورةٌ عشريّة غير مُنتهية ودوريّة.

تذكر

1- العدد النسبي هو كل عدد يُكتب بالشكل $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ وَ $b \neq 0$

2- نحصل على الصورة العشرية لعدد نسبي بقسمة بسطه على مقامه.

تدريب

بيّن أنّ الصّورة العشريّة للعدد النّسبي $\frac{24}{11}$ غير مُنتهية ودوريّة، ثُمَّ عيّن دورها.

الحل

$\frac{24}{11}=2.18181818...$ الدور هو 18

الأعداد غير النّسبية

نشـــــاط

تعرّفْتَ سابقاً العدد $\sqrt{5}$ ولنبحث فيما إذا كان عدداً نسبياً أم لا.

نعلم أنّ $4 < 5 < 9$ **إذن**: $2 < \sqrt{5} < 3$

إنّ 2 قيمة تقريبية لـ $\sqrt{5}$ بالنقصان و 3 قيمة تقريبية لـ $\sqrt{5}$ بالزيادة.

1. بيّن أنّ: $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

إنّ: $(2.21)^2 = 4.8841$ و $(2.30)^2 = 5.29$

2. لإيجاد تقريب أفضل بيّن أنّ: $2.23 < \sqrt{5} < 2.24$

إنّ: $(2.23)^2 = 4.9729$ و $(2.24)^2 = 5.0176$

3. أيضاً بيّن أنّ: $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$

إنّ: $(2.236)^2 = 4.999696$ و $(2.237)^2 = 5.004169$

ولو تابعنا هذه العمليةَ لحصلنا على قيمة تقريبية أكثر دقة لـ $\sqrt{5}$.

ونقبل أنّ الصّورة العشريّة للعدد $\sqrt{5}$ غير مُنتهية وغير دوريّة.

تعلّم

العدد غير النسبي هو عدد صورته العشرية غير منتهية وغير دورية.

أمثلة على الأعداد غير النسبيّة

هناك عدد غير نسبي شائع الاستعمال هو العدد π

وإنّ الأعداد $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ... أعداد غير نسبيّة

نُرمِّز الأعداد غير النسبيّة $\mathbb{Q}'$ ونُسمّي $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تــــذكر

العدد π يمثل نسبة محيط الدائرة إلى طول قطرها.



تمرينات الوحدة

1. بيِّن فيما إذا كان العدد 209 أوّليّاً أم غير أولي.

الحل:

نقسم العدد 209 على الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر منه أو تساويه وهي: 2,3,5,7,11,13

لا نختبر العدد الأولي 17 لأنّ $(17)^{\circ} > 209$

العدد 209 لا يقبل القسمة على 2 و 3 و 5

هل العدد 209 يقبل القسمة على كل من الأعداد: 7,11,13

لاحظ أنّ: $209 = 7 \times 29 + 6$ الباقي ليس صفراً

$209 = 11 \times 19 + 0$ الباقي صفر

نستنتج أنّ العدد 209 ليس أوّلياً.

2. إذا كانت بواقي قسمة العدد x على الأعداد 28 ، 35 ، 42 هي على التّرتيب 26 ، 33 ، 40

فأوجد أصغر قيمة للعدد x.

الحل:

28 تقسم x والباقي 26 فلو أضفنا 2 إلى كلٍ من x و 26 لأصبحت $x+2$ تقبل القسمة على 28 دون باقي.

وبنفس الطريقة نجد أنّ:

$x+2$ تقبل القسمة على 35 دون باقي و $x+2$ تقبل القسمة على 42 دون باقي.

إذن: $x+2$ هي م.م.أ للأعداد (28 ، 35 ، 42)

$$7 \times 2^2 = 28$$

$$7 \times 5 = 35$$

$$7 \times 3 \times 2 = 42$$

$x+2$ تساوي م.م.أ (28 ، 35 ، 42) $= 7 \times 3 \times 5 \times 2^2$

$$420 = x + 2$$

$$418 = x$$

3. أوجد ناتج كلّ مما يأتي:

$$1)\ \frac{2-\frac{3}{5}}{4+\frac{2}{3}} \div \frac{1+\frac{1}{2}}{-2+\frac{5}{2}} = \frac{\frac{10}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{12}{3}+\frac{2}{3}} \div \frac{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{-4}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{14}{3}} \div \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{5} \times \frac{3}{14} \div \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{10} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$2)\ \frac{396}{423} + \frac{28}{47} = \frac{396}{\underset{(1)}{9\times 47}} + \frac{28}{\underset{(9)}{47}} = \frac{396}{9\times 47} + \frac{252}{9\times 47}$$

$$= \frac{648}{9\times 47} = \frac{8\times 81}{9\times 47} = \frac{72}{47}$$

4. أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين 138 ، 684 بطريقة إقليدس.

الحل

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
132	138	684
6	132	138
0	6	132

إنّ ع.م.أ = 6 وهو آخر مقسوم عليه في سلسلة عمليات القسمة.

5. أوجد الأعداد الطبيعيّة a الأصغر من 50 بحيث يكون العامل المشترك الأكبر للعددين a و 40 هو 10.

الحل

إنّ: ع.م.أ للعددين a و 40 هو 10 يعني:

حيث: 4 , x أوليان فيما بينهما. $a = 10x \ , \ 40 = 10\,(4)$

من أجل العدد $x = 1$ لأن 1 ، 4 أوليان فيما بينهما نجد: $a = 10$.

من أجل العدد $x = 3$ لأن 3 ، 4 أوليان فيما بينهما نجد: $a = 30$.

من أجل العدد $x = 5$ لأن 5 ، 4 أوليان فيما بينهما نجد: $a = 50$.

إذن الأعداد الطبيعية a الأصغر من 50 هي: 10 , 30.

تذكر: العدد الطبيعي 1 ، أولي مع أي عدد طبيعي آخر.

الوحـــــــدة الثّانيــــــــة

الأعداد النّسبيّة والأعداد غير النّسبيّة

1) **اختر الإجابة الصّحيحة:**

a. العدد 127 هو عدد:

d) ليس عدداً نسبياً	d)	زوجي	c)	غير أولي	b)	أولي	a)

b. العامل المشترك الأكبر للعددين 348، 222 هو:

6	d)	11	c)	9	b)	8	a)

c. المضاعف المشترك الأصغر للأعداد: 72 ، 18 ، 25 هو:

1900	d)	2006	c)	1800	b)	1600	a)

d. العدد 256 مضاعف مشترك للأعداد:

{ 3، 256، 8 }	c)	{ 2، 8، 32 }	b)	{2، 5، 7}	a)

2) **السّؤال الثّالث:** أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين: 1024 ، 160 بطريقة اقليدس.

الحل

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
64	160	1024
32	64	160
0	32	64

إنّ ع.م.أ= 32 وهو آخر باقٍ غير معدوم في سلسلة عمليات القسمة.

3) **السّؤال الرابع:** أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين: 245، 105 بطريقتين.

الحل

$$245 = 5 \times 7^2 \quad , \quad 105 = 3 \times 7 \times 5$$

$$\begin{pmatrix} 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

ع.م.أ = $5 \times 7 = 35$

طريقة اقليدس

المقسوم	المقسوم عليه	الباقي
245	105	35
105	35	0

ع.م.أ= 35 وهو آخر مقسوم عليه في سلسلة عمليات القسمة

4) **السّؤال الخامس:** إذا كانت بواقي قسمة الأعداد 64، 75، 49 على العدد x هي:
على الترتيب: 1 , 3 , 4 أوجد أكبر قيمة للعدد x .

الحل

$$64-1=63$$
$$75-3=72$$
$$49-4=45$$
$$x = \text{ع.م.أ}\ (45,72,63) = 9$$

5) أوجد ناتج ما يأتي:

1) $\frac{72}{120}+\frac{248}{379}=\frac{9}{15}+\frac{248}{379}=\frac{3411}{5685}+\frac{3720}{5685}=\frac{7131}{5685}$

2) $\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}+4-\right)\right]-\left[3-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\left[\frac{5}{15}-\left(\frac{6}{15}+\frac{60}{15}\right)\right]-\left[\frac{6}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\right)\right]$

$$=\left(\frac{5}{15}-\frac{66}{15}\right)-\left(\frac{6}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{-61}{15}-\frac{7}{2}=\frac{-122}{30}-\frac{105}{30}=\frac{-227}{30}$$

3) $\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{3}+3\right)\right]\times\left[\frac{1}{3}+\left(5-\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{9}{15}-\left(\frac{5}{15}+\frac{45}{15}\right)\right]\times\left[\frac{2}{6}+\left(\frac{30}{6}-\frac{3}{6}\right)\right]$

$$=\left(\frac{9}{15}-\frac{50}{15}\right)\times\left(\frac{2}{6}+\frac{27}{6}\right)=\frac{-41}{15}\times\frac{29}{6}=\frac{-1189}{90}$$

4) $\frac{3-\frac{1}{4}}{2+\frac{3}{2}}\div\frac{5-\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{12}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{4}{2}+\frac{3}{2}}\div\frac{\frac{15}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{10}-\frac{5}{10}}=\frac{\frac{11}{4}}{\frac{7}{2}}\div\frac{\frac{14}{3}}{\frac{-1}{10}}=\frac{11}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{3}{14}\times\frac{-1}{10}=\frac{-33}{1960}$

5) $\frac{-11}{4} - 3 \times \frac{2}{5} - 5 \times \frac{1}{2} + \left(-3 \times \frac{1}{3}\right) + 10 \times \frac{1}{60} = \frac{-11}{4} - \frac{6}{5} - \frac{5}{2} - \frac{3}{3} + \frac{10}{60}$

$$= \frac{-165}{60} - \frac{72}{60} - \frac{150}{60} - \frac{-60}{60} + \frac{10}{60} = \frac{-293}{60}$$

6) حلّ المسائل الآتية:

مسألة①:

اشترى ثلاثة إخوة جهاز حاسوب بسعر 40000 ليرة سورية . فدفع الأول $\frac{2}{5}$ من ثمن الحاسوب، ودفع الثاني $\frac{3}{4}$ مما بقي من ثمنه، ثُمَّ دفع الثالث باقي ثمنه، أوجد ما دفعه كل واحد منهم.

الحل

ما دفعه الأول هو : $40000 \times \frac{2}{5} = 8000 \times 2 = 16000$

بقي من ثمنه : $40000 - 16000 = 24000$

ما دفعه الثاني هو : $24000 \times \frac{3}{4} = 6000 \times 3 = 18000$

ما دفعه الثالث هو: $40000 - (16000 + 18000) = 6000$

مسألة②:

يُنجز فلاح حراثة $\frac{1}{5}$ أرضه في ساعة واحدة، فكم ساعة يحتاج الفلاح لحراثة $\frac{3}{4}$ أرضه.

الحل

$\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{4} = 3.75$ ساعة

مسألة③:

أراد صاحب متجر تزيين الساحة المجاورة لمتجره بوضع حبل يحوي مصابيح كهربائية على شكل مثلث عند كل رأس فيه مصباح والمصابيح الموزّعة على أضلاعه يفصل بين كل مصباحين متتاليين مسافات متساوية فإذا كانت أطوال أضلاعه (16 ، 18 ، 14) متراً، فأوجد عدد المصابيح في هذا الحبل.

الحل

المسافة بين كل مصباحين متتاليين هي: ع.م.أ (16 ، 18 ، 14) = 2

عدد المصابيح على الضلع ذي الطول 16 متراً هو: مصباح $16 \div 2 = 8$

عدد المصابيح على الضلع ذي الطول 14 متراً هو: مصباح $14 \div 2 = 7$

عدد المصابيح على الضلع ذي الطول 18 متراً هو: مصباح $18 \div 2 = 9$

فيكون عدد المصابيح في الحبل هو: مصباحاً $8 + 7 + 9 = 24$

7) بيّن أيّ من الأعداد الآتية عدد نسبي وأيها عدد غير نسبي:

0.39 , $-\sqrt{7}$ ، $\sqrt{25-9}$ ، $\frac{3\sqrt{4}}{5}$ ، $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{300}$ ، $\sqrt{\frac{9}{36}}$ ، $\frac{-2}{5}$ ، $-2\sqrt{5}$.

الأعداد النسبية	0.39	$\sqrt{25-9}$	$\sqrt{\frac{9}{36}}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3\sqrt{4}}{5}$
الأعداد غير النسبية	$-2\sqrt{5}$	$\sqrt{300}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{7}$	



تمثيــل الأعــداد الحقيقيــة علــى خــط الأعــداد

مُـــــنظِّم الـــــدّرس

أهداف الدّرس

تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد

مُفردات جديدة

العدد الحقيقي

مُستلزمات الدّرس

أدوات هندسية – السّبورة.

ســـــير الـــــدّرس

التّمهيـــــد

اكتب عنوان الدّرس على السّبورة،

اسأل ما المجموعات العدديّة التي تعلّمتها حتى الآن

كلِّف طالب بتمثيل الأعداد النّسبيّة الواردة في التّمهيد

يذكر المدرّس الآتي:

لتمثيل العدد $\frac{5}{8}$ نبحث عن النّقطة التي تبعد عن 0 مسافة $\frac{5}{8}$ في القسم الموجب

لتمثيل العدد (-4.6) نبحث عن النّقطة التي تبعد عن 0 مسافة (-4.6) في القسم السالب

اسأل هل نستطيع رسم دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$؟

الجواب: ارسم على السّبورة مثلث قائم الزّاوية طول كل من ضلعيه القائمتين **1**

ثُمّ بيّن أنّ طول الضّلع الثّالثة هو $\sqrt{2}$ (ذكر بنظريّة فيثاغورث) استنتج رسم الدّائرة.

التّعليـــم والـــتّعلُّم

اذكر :

بعد أن قمنا برسم دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$،

اسأل كيف يمكن أن تُمثِّل العدد $\sqrt{2}$ على خط الأعداد وكذلك العدد $\sqrt{3}$

اذكر المثال صفحة (41) يُوضّح خطوات تمثيل هذا العدد

اطلب من المجموعات تنفيذ المثال صفحة (41) للوصول لتمثيل العدد $\sqrt{2}$ ثُمّ العدد $\sqrt{3}$

اسأل بعدها أكثر من طالب ما خطوات تمثيل العدد $\sqrt{2}$ ثُمّ $\sqrt{3}$

ثُمّ هل يمكن تمثيل الأعداد $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{4}$ ، $-\sqrt{6}$ ، $-\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{4}$

اعرض التعلم مسبوقاً بكلمة نقبل بأنّ

ثُمّ اطلب تنفيذ التّطبيق صفحة (42)

الخاتمـــة والتقـــويم

التّحقّق من الفهم: اسأل هل يمكن تمثيل العدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ على خط الأعداد.

تمـــــــــــــرّن

وظيفة منزلية:

اختر تمارين مناسبة من كتاب الطّالب وكتاب الأنشطة والتّدريبات ليقوم الطّلاب بحلها.

الوحـــــدة الثّالثـــــة

الأعـــــداد الحقيقيـــــة

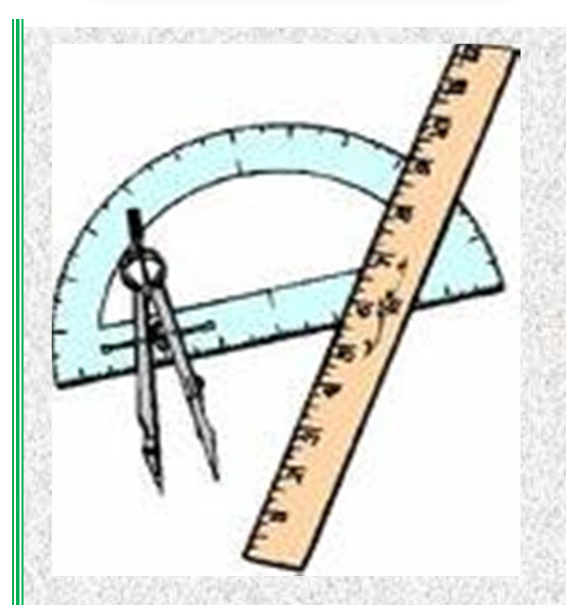
محتوى الوحدة

1. جمعُ الأعداد الحقيقية وطرحها.
2. القيمةُ المطلقة.
3. ضربُ الأعداد الحقيقية وقسمتها.
4. إيجادُ قيم التعابير الجبرية باستخدام الأعداد الحقيقية.

بعـد أنْ تعرفنـا مجموعـة الأعـداد النِّسـبيّة، وأتقنـا العمليـاتِ فيهـا، نتعرفُ هـذا العام مجموعة الأعداد الحقيقية، ونطبقُ فيها جميع ما سبق من عملياتِ جمعٍ وطرحٍ وضربٍ وقسمةٍ إضافة إلى القوى والقيمة المطلقة وكلّ ذلك ضمن إطار تعليمي شائق مناسب مع الكثير من الأنشطة والتطبيقات.

3 - 1

تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد



سوف تتعلّم

- تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد.
- المقارنة بين عددين حقيقيين على خط الأعداد.

أولاً: تمثيل الأعداد الحقيقية

نشـــــاط

مثِّل الأعداد النّسبية -5 , 2 , -4.6 , $\frac{5}{8}$, 1.5 , -3 على خطّ الأعداد المرسوم

0 +1

تـــذكّر

$\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

$\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة.

$\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية.

$\mathbb{Q}'$ مجموعة الأعداد غير النسبية.

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي اجتماع مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

ومجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{Q}'$:

أي: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مثال

لتمثيل العددين $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ على خط الأعداد.

اتبع الخطواتِ الآتيةَ:

ارسمْ خطّ الأعداد وعيّن عليه نقطة المبدأ O التي تمثل العدد 0 ثُمَّ عيّن عليه النّقطة I التي تمثل العدد 1 (واحدة الأطوال)

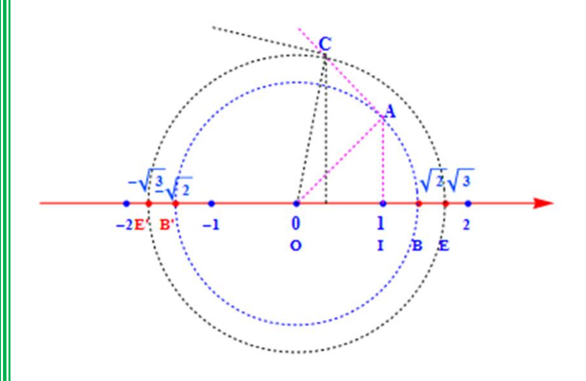
ارسمِ من I عموداً على خطّ الأعداد وعيّن عليه النّقطة A بحيث $IA = 1$ فيكون $OA = \sqrt{2}$ لماذا؟

ارسمِ الدائرةَ التي مركزها O وطول نصف قطرها $OA = \sqrt{2}$ فتقطع

خطّ الأعداد في النقطتين B وَ B' فيكون $OB = OB' = \sqrt{2}$ لماذا؟

إذنْ: B تمثل العدد $+\sqrt{2}$ و B' تمثل العدد $-\sqrt{2}$

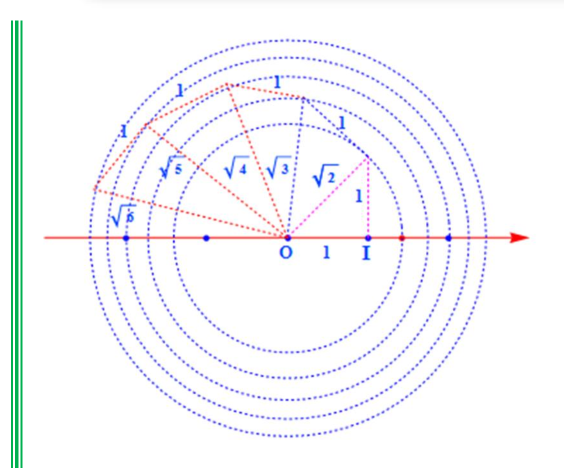
ولتمثيلِ العددين $+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ أيضاً تابع كما في الشّكل المجاور:



ارسمْ من A عموداً على $[OA]$ وعيّن عليه النّقطة C

بحيث $AC = 1$ فيكون $OC = \sqrt{3}$ لماذا؟

ارسمِ الدائرةَ التي مركزها O وطول نصف قطرها $OC = \sqrt{3}$



فتقطع خطّ الأعداد في النقطتين E' , E

فيكون $OE = OE' = \sqrt{3}$ لماذا؟

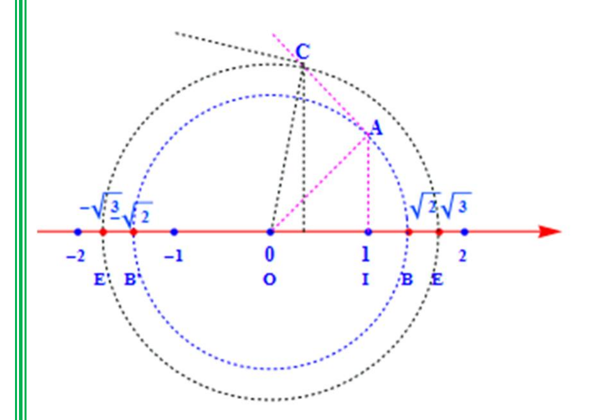
إذن E تُمثل العدد $+\sqrt{3}$ وَ E' تُمثل العدد $-\sqrt{3}$

الحل:

ارسم من I عموداً على خط الأعداد وعيّن عليه النقطة A بحيث $IA = 1$

فيكون $OA = \sqrt{2}$ لماذا؟

حسب فيثاغورث في المثلث القائم OIA



ارسم الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها $OA = \sqrt{2}$ فتقطع

خط الأعداد في النقطتين B وَ B' فيكون $OB = OB' = \sqrt{2}$ لماذا؟

كل منهما يساوي طول نصف قطر الدائرة التي مركزها O وطول

نصف قطرها $\sqrt{2}$

إذن: B تمثل العدد $+\sqrt{2}$ و B' تمثل العدد $-\sqrt{2}$

ولتمثيل العددين $+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ أيضاً تابع بالشكل المجاور:

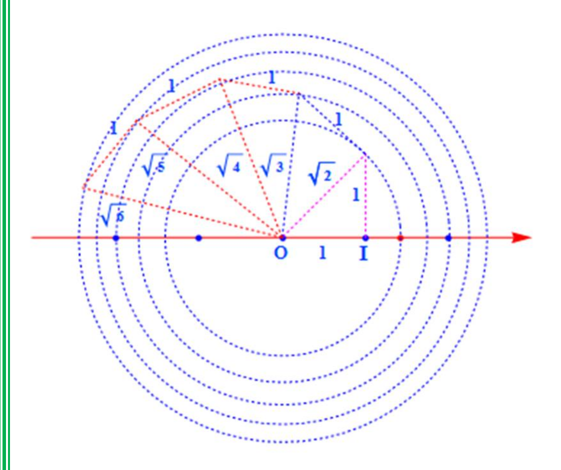
ملاحظة



يُمكن متابعة العمل السابق لتمثيل الأعداد

$\dots , -\sqrt{7} , -\sqrt{6} , -\sqrt{5}, -\sqrt{4} , \dots, \sqrt{4}, \sqrt{5} , \sqrt{6} , \sqrt{7} , \dots$

الحل:



ارسم من A عموداً على $[OA]$ وعيّن عليه النقطة C بحيث $AC = 1$

فيكون $OC = \sqrt{3}$ لماذا ؟

حسب فيثاغورث في المثلث القائم OAC

ارسم الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها $OC = \sqrt{3}$ فتقطع خط

الأعداد في النقطتين E' , E فيكون $OE = OE' = \sqrt{3}$ لماذا ؟

كل منهما يساوي طول نصف قطر الدائرة التي مركزها O وطول

نصف قطرها $\sqrt{3}$

تعلّم

كلّ عدد حقيقي يمثّل بنقطة على خطّ الأعداد يُسمّى فاصلتها.
وكلّ نقطة على خطّ الأعداد تمثّل عدداً حقيقياً.

تطبيق

1. انظر خطّ الأعداد المرسوم في **النشاط السابق**
ما فاصلة كلٍّ من النقاط O , I , B , B' , E , E' ؟
2. مثّل العددين $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$ على خط الأعداد.

الحل:

.1

فاصلة النقطة O تساوي ...0...

فاصلة النقطة I تساوي ...+1...

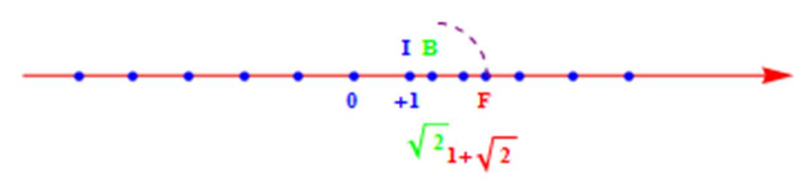
فاصلة النقطة B تساوي ...$+\sqrt{2}$...

فاصلة النقطة B' تساوي ...$-\sqrt{2}$...

فاصلة النقطة E تساوي ...$+\sqrt{3}$...

فاصلة النقطة E' تساوي...$-\sqrt{3}$...

2. نرسم خط الأعداد ونُعيِّن عليه النقطة I التي فاصلتها $+1$ ثُمّ نُعيِّن النقطة B التي فاصلتها $+\sqrt{2}$
نفتح الفرجار فتحة طولها $+1$ ونركِّزه في النقطة B ونرسم قوساً يقع على خط الأعداد في النقطة F فتكون فاصلة النقطة F تساوي $1+\sqrt{2}$.
ولتمثيل العدد $2+\sqrt{3}$ على خط الأعداد، نُعيِّن النقطة E التي فاصلتها $+\sqrt{3}$ ثُمّ نفتح الفرجار فتحة طولها $+2$ ونركِّزه في النقطة E ونرسم قوساً يقع على خط الأعداد في النقطة H فتكون فاصلة النقطة H تساوي $2+\sqrt{3}$.

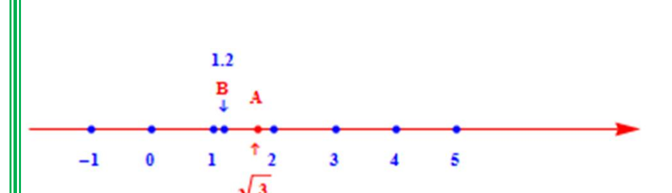


ثانياً: ترتيب الأعداد الحقيقية ومقارنتها

إذا كانت النّقطة A تمثّل العدد النّسبي a

وكانت النّقطة B تمثّل العدد النّسبي b على خط الأعداد

وكانت A إلى يمين B فإنّ $a > b$ وبالعكس.



نمدّد ذلك ليشمَلَ مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال

في الشّكل المرسوم جانباً قارن بين $a = \sqrt{3}$ و $b = 1.2$.

الحل:

بما أنّ A تمثل العدد النّسبي a ، و B تمثل العدد النّسبي b

نجد $\sqrt{3} > 1.2$ لأنّ A تقع على يمين B.

تذكّر

إذا كان a , b عددين نسبيين

وكانت $a - b > 0$ فإنّ $a > b$.

وإذا كانت $a - b < 0$ فإنّ $a < b$.

نمدد ذلك ليشمل مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال

قارن بين العددين $\sqrt{2}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$

الحل

$$\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}} = \frac{2-3}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$$

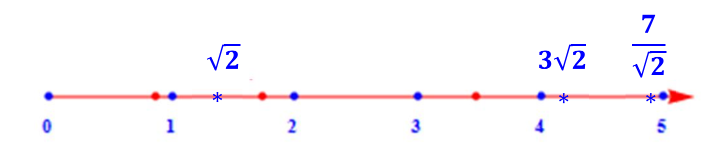


إذن: $\sqrt{2} < \frac{3}{\sqrt{2}}$

حاول أن تحل

قارن بين العددين $3\sqrt{2}$, $\frac{7}{\sqrt{2}}$

الحل:



إذن: $\frac{7}{\sqrt{2}} > \sqrt{5}$

3 - 2 جمـــــع الأعـــــداد الحقيقيـــــــة وطرحهـــــا



سوف تتعلّم

- جمع عددين حقيقيّين أو أكثر.
- طرح عدد حقيقي من آخر.
- خواص الجمع في مجموعة الأعداد الحقيقية.

أولاً: جمع الأعداد الحقيقية

نشـــــاط

لتكن لدينا الأعدادُ النّسبية a , b , c حيث: $a+b=7.16$, $c=\frac{9}{10}$، احسب كلاً من:

$a+(0+b)$, $a+(b+c)$, $b+a$ مع التعليل.

الحل:

بما أن $b+a=a+b$ لأن الجمع تبديلي في مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

إذن: $b+a=7.16$

بما أن $a+(b+c)=(a+b)+c$ لأن الجمع تجميعي في $\mathbb{Q}$

إذن: $a+(b+c)=7.16+\frac{9}{10}$

$=7.16+0.9=8.06$

بما أن $0+b=b$ لأن الصفر حيادي بالنسبة للجمع في $\mathbb{Q}$

إذن: $a+(0+b)=a+b$

$=7.16$

تعلّم

نقبل بأنه يمكن جمعُ أيّ عددين حقيقيين، وأنّ مجموعهما هو عدد حقيقي أيضاً ونقبل بأنّ خواص الجمع في الأعداد الحقيقية هي خواص الجمع ذاتها في الأعداد النّسبية وهي:

1. أياً كان العددان الحقيقيان a , b فإن: $a+b=b+a$ أي أنّ الجمع في $\mathbb{R}$ تبديلي.
2. $a+0=0+a=a$ أي أنّ الصفر حيادي بالنسبة إلى الجمع في $\mathbb{R}$.
3. لكل عدد حقيقي a نظير جمعي وهو $(-a)$
$a+(-a)=(-a)+a=0$.
4. أياً كانت الأعداد الحقيقية a , b , c فإن:
$(a+b)+c=a+(b+c)$ أي أنّ الجمع في $\mathbb{R}$ تجميعي، ونكتب:
$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$
5. أياً كان العددان الحقيقيان a , b فإنّ:
$-(a+b)=-a-b$, $-(a-b)=-a+b$
6. أياً كان العدد الحقيقي a فإنّ نظير نظير العدد a هو a.

تطبيق ①

ما النّظيرُ الجمعيُّ لكل من الأعداد: $\sqrt{2}-\pi$, $4+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ؟

الحل

النّظيرُ الجمعيُّ للعدد $\sqrt{2}$ هو العدد $-\sqrt{2}$

النّظيرُ الجمعيُّ للعدد $4+\sqrt{3}$ هو العدد $-4-\sqrt{3}$

النّظيرُ الجمعيُّ للعدد $\sqrt{2}-\pi$ هو العدد $-\sqrt{2}+\pi$

ملاحظـــة

إنّ $-a$ تُقرأ نظير a الجمعي

تطبيق ②

ليكن لدينا المجموع $S=x+y+z+t$

احسب S عندما $x=\sqrt{5}$, $y=\frac{2}{5}$, $z=0.2$, $t=-\sqrt{5}$.

الحل:

$$S=x+y+z+t=\sqrt{5}+\frac{2}{5}+\pi-\sqrt{5}\quad=\frac{2}{5}+\pi$$

ثانياً: طرح الأعداد الحقيقية

تعلّم

إذا كان a,b عددين حقيقيين فإنّ $a-b=a+(-b)$

أي لطرح عدد حقيقي من آخرَ نضيف النظير الجمعي للمطروح إلى المطروح منه.

تطبيق

إذا كان $a=-\pi-2$, $b=-\pi+\sqrt{2}$ فإن:

$$a-b=(-\pi-2)-(-\pi+\sqrt{2})=(-\pi-2)+(+\pi-\sqrt{2})=-\pi-2+\pi-\sqrt{2}=-2-\sqrt{2}$$

لاحظ أنّ $-2-\sqrt{2}$ هو أبسط صورة لناتج الطرح.

حاول أن تحل

1) إذا كان $a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $b=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$ فأوجد كلاً من: $a-b-\sqrt{2}$, $b-a+\sqrt{2}$

2) أوجد ناتج المقدار: $\left(1-\sqrt{13}\right)+13-\left(-\sqrt{13}\right)$

3) إذا كان $a+b=4.5$ فاحسب: $3.5-a-b$

4) إذا كان $c-d=0.4$ فاحسب: $c-(1.2+d)$

5) أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي بأبسط صورة: $A=-\pi-\left(\sqrt{2}-\pi\right)+3$, $B=\frac{3}{4}-\left(-\sqrt{11}-\frac{1}{4}\right)-\sqrt{11}$

الحل:

① $b-a+\sqrt{2}=\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

② $\left(1-\sqrt{13}\right)+13-\left(-\sqrt{13}\right)=1-\sqrt{13}+13+\sqrt{13}=14$

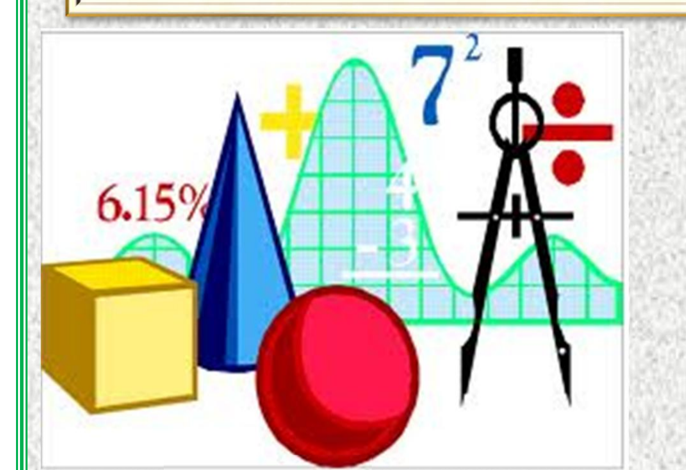
③ $3.5-a-b=3.5-(a+b)=3.5-4.5=-1$

④ $c-(1.2+d)=c-(d+1.2)=c-d-1.2=0.4-1.2=-0.8$

⑤ $B=\frac{3}{4}+\sqrt{11}+\frac{1}{4}-\sqrt{11}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

$A=-\pi-\sqrt{2}+\pi+3=-\sqrt{2}+3$

3 - 3 القيمـــــة المطلقـــــة لعـــــدد حقيقـــــي



سوف تتعلّم

- القيمة المطلقة لعدد حقيقي.
- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

تـــذكر

- القيمة المطلقة لعدد نسبي x هي البعد (المسافة) بين مبدأ الإحداثيات والنقطة التي يمثلها العدد x ونُرمِّز إليها بـ $|x|$
- أياً كان العدد النسبي x فإنّ: $|x| = |-x|$ تبقى هذه الخاصة صحيحة أياً كان $x \in \mathbb{R}$

نشـــاط

أوجد ناتج كلّ من: $|0|$, $\left|-\frac{3}{8}\right|$, $|-17|$, $|+4|$

الحل:

أكمل: $|+4| = 4$

$|-17| = 17$

$\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$

$|0| = 0$

تعلّم

نُمدِّد تعريف القيمة المطلقة لعدد نسبي ليشمل الأعداد الحقيقية أي:

إذا كان x عدداً حقيقياً موجباً فإنّ: $|x| = x$

إذا كان x عدداً حقيقياً سالباً فإنّ: $|x| = -x$

تطبيق

إنّ: $|\pi| = \pi$ لأنّ π عدد موجب.

$|-\pi| = \pi$ لأنّ $-\pi$ عدد سالب.

$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ لأنّ $1-\sqrt{2}$ سالب.

$|\sqrt{6}-\pi| = \pi-\sqrt{6}$ لأنّ $\sqrt{6}-\pi$ سالب.

$\left|\pi+\frac{1}{2}\right| = \pi+\frac{1}{2}$ لأنّ $\pi+\frac{1}{2}$ موجب.

حاول أن تحلّ

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي بأبسط صورة:

① $|\sqrt{3}|-\sqrt{3}$

② $|-\sqrt{3}|-\sqrt{3}$

③ $||4|+\sqrt{5}|$

④ $||0|-\sqrt{7}|$

⑤ $|3+\pi|-\pi$

⑥ $\left|1-\frac{2}{5}\right|+\pi$

⑦ $|-\sqrt{5}|-\sqrt{5}$

⑧ $|-4-\pi|-\pi$

الحل:

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي بأبسط صورة:

①........ $|\sqrt{3}|-\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$

②........ $|-\sqrt{3}|-\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$

③........ $||4|+\sqrt{5}| = |4+\sqrt{5}| = 4+\sqrt{5}$

④........ $||0|-\sqrt{7}| = |0-\sqrt{7}| = |\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

⑤........ $|3+\pi|-\pi = 3+\pi-\pi = 3$

⑥........ $\left|1-\frac{2}{5}\right|+\pi = \left|\frac{3}{5}\right|+\pi = \frac{3}{5}+\pi$

⑦........ $|-\sqrt{5}|-\sqrt{5} = \sqrt{5}-\sqrt{5} = 0$

⑧........ $|-4-\pi|-\pi = 4+\pi-\pi = 4$

استخدامِ القيمةَ المطلقة في حل المعادلات

تعلّم

المعادلة $|x|=0$ تعني $x=0$

تطبيق 1

أوجد حلّ المعادلة $|x-2|=0$

الحل:

المعادلة $|x-2|=0$ تعني $x-2=0$ ومنه $x=2$ وهو الحل

تطبيق 2

أوجد حلّ المعادلة $|x+\sqrt{2}|=0$

الحل:

المعادلة $|x+\sqrt{2}|=0$ تعني $x+\sqrt{2}=0$ ومنه $x=-\sqrt{2}$ وهو الحل

تعلّم

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإنّ: $|x|=a$ تعني $x=a$ أو $x=-a$.

تطبيق 1

أوجد حلّ المعادلة: $|x|=3$

الحل:

المعادلة $|x|=3$ تعني $x=3$ أو $x=-3$

تطبيق 2

أوجد حلّ المعادلة: $|x-1|=\sqrt{5}$

الحل:

المعادلة $|x-1|=\sqrt{5}$ تعني $x-1=\sqrt{5}$ أو $x-1=-\sqrt{5}$

ومنه $x=1+\sqrt{5}$ أو $x=1-\sqrt{5}$

حاول أن تحلّ

1) أوجد حلّ المعادلة $|x+\pi-1|=\pi$ في $\mathbb{R}$.

2) أوجد حلّ المعادلة $\left|\pi-x+\sqrt{2}\right|=\pi-\sqrt{2}$ في $\mathbb{R}$.

3) اختصر كلاً من العبارات الآتية:

$$A=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)-\left(+\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right)$$

$$B=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)-\left[-\left(-\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]+\left(-\sqrt{3}-\frac{4}{7}\right)$$

$$C=\left[\frac{4}{3}-(\pi-3)\right]+\left[3-(-\pi+3)\right]$$

4) إذا كان y,x عددين حقيقيين حيث $x\leq y$ ، بسّط كلاً من:

$$A=|x-y-3|-|y-x|$$

$$B=|y-x+4|-|x-y|$$

الحل:

1) المعادلة $|x+\pi-1|=\pi$ تعني $x+\pi-1=\pi$ ومنه $x=\pi-\pi+1$ أي $x=1$

أو $x+\pi-1=-\pi$ ومنه $x=-\pi-\pi+1$ أي $x=-2\pi+1$

2) المعادلة $\left|\pi-x+\sqrt{2}\right|=\pi-\sqrt{2}$

تعني $\pi-x+\sqrt{2}=\pi-\sqrt{2}$

$-x+\sqrt{2}=\pi-\sqrt{2}-\pi$

ومنه $x=2\sqrt{2}$

أو $\pi-x+\sqrt{2}=-\pi+\sqrt{2}$

$-x+\sqrt{2}=-\pi+\sqrt{2}-\pi$

$x=2\pi$

3)

$$A=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)-\left(+\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\frac{5}{3}=-\frac{10}{3}$$

$$B=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)-\left[-\left(-\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]+\left(-\sqrt{3}-\frac{4}{7}\right)=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}-\left[\left(\sqrt{2}-\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]=-\frac{4}{7}$$

$$C=\left[\frac{4}{3}-(\pi-3)\right]+\left[3-(-\pi+3)\right]=\frac{4}{3}-\pi+3+3+\pi-3=\frac{13}{3}$$

4) لدينا $x \le y$ إذن $x-y \le 0$ وكذلك $y-x \ge 0$ إذن:

$$\begin{aligned} A &= |x-y-3|-|y-x| \\ &= -(x-y-3)-(y-x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= |y-x+4|-|x-y| \\ &= (y-x+4)+(x-y) \\ &= 4 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

ما مجموعة حلول كل من المعادلات الآتية في $\mathbb{R}$ ؟

$|x| = x$, $|x| = -x$, $|x| = -2$

الحل:

1) $\mathbb{R}^+$

2) $\mathbb{R}^-$

3) $\varnothing$



4 - 3 ضـــــرب الأعـــــداد الحقيقيـــــة



سوف تتعلّم

- الضرب في $\mathbb{R}$ وخواصه.
- إيجاد مقلوب عدد حقيقي غير معدوم.
- توزيع الضرب على الجمع.
- القيمة المطلقة لجداء عددين حقيقيين.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب.
- تبسيط عبارات تحوي جذوراً تربيعية.

أولاً: جداء عددين حقيقيين

نشـــاط

لتكن لدينا الأعداد النّسبيّة a, b, c حيث: $a\,b = \frac{2}{5}$, $(a\,b)\,c = \frac{-3}{4}$

أكمل:

1. $b\,a = ab$ لأن الضرب في $\mathbb{Q}$ تبديلي إذن: $b\,a = \frac{2}{3}$
2. $a(b\,c) = (a\,b)c$ لأن الضرب في $\mathbb{Q}$ تجميعي إذن: $a(b\,c) = \frac{-3}{4}$
3. $a \times 1 = a$ لأن الواحد حيادي إذن: $(a \times 1) \times b = a \times b = \frac{2}{5}$
4. $(ab) \times 0 = 0$ لأن الصفر عنصر ماص بالنسبة لعملية الضرب
5. $a(b + b\,c) = ab + a(b\,c)$ لأن الضرب يقبل التوزيع على الجمع إذن: $a(b + b\,c) = \frac{2}{5} + \frac{-3}{4} = \frac{-7}{20}$

تعلّم

نُمدّد تعريف الضرب في $\mathbb{Q}$ ليشمل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

ونقبل أنّ خواص الضرب في $\mathbb{R}$ هي خواص الضرب ذاتها في $\mathbb{Q}$

مثال 1

ناتجُ ضرب العددين 4 وَ $\sqrt{3}$ هو: $4\times\sqrt{3}$ ويُكتَب: $4\sqrt{3}$

ناتجُ ضرب العددين 1 وَ $\sqrt{5}$ هو: $1\times\sqrt{5}$ ويُكتَب: $\sqrt{5}$

ناتجُ ضرب العددين $\sqrt{2}$ وَ $\sqrt{2}$ هو: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ ويُكتَب: $\left(\sqrt{2}\right)^2$

ناتجُ ضرب العددين π وَ π هو: $\pi\times\pi$ ويُكتَب: $(\pi)^2$

تذكّر

إذا كان $a=b$ فإن $a\times a$ تُكتب a^2

وتُقرأ a مربع.

إذن: $a\times a=a^2$

مثال 2

1. مقلوب العدد 3 هو $\frac{1}{3}$ ومقلوب $\frac{1}{3}$ هو 3.
2. مقلوب العدد -1.4 هو $\frac{-5}{7}=\frac{-1}{1.4}=\frac{1}{-1.4}$.
3. مقلوب العدد $\sqrt{3}$ هو $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومقلوب $\frac{1}{\sqrt{3}}$ هو $\sqrt{3}$.

ممّا سبق نستنتج أنه إذا كان $a\neq 0$ فإنّ: مقلوب مقلوب a يساوي a أي أنّ: $a=\frac{1}{\frac{1}{a}}$

تعلّم

لبيان أنّ العدد الحقيقي a' مقلوب للعدد الحقيقي a نُثبِت أنّ: $a\cdot a'=1$.

تطبيق 1

بيّن أنّ العدد $-\frac{3}{2}$ هو مقلوب للعدد $\frac{1}{-1.5}$

الحل: $-\frac{3}{2}\times\frac{1}{-1.5}=-1.5\times\frac{1}{-1.5}=1$

إذن: العدد $\frac{-3}{2}$ هو مقلوب للعدد $\frac{1}{-1.5}$.

تطبيق 2

احسب $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times(+3)$.

الحل:

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times(+3)=\frac{1}{3}\times3\times\sqrt{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

تعلّم

لا يتغيّر جداء عدة أعداد حقيقية:
- إذا غيرنا ترتيب هذه الأعداد أو بعضها.
- إذا عوّضنا بعض الأعداد بجدائها.

تطبيق

احسبْ $\pi \times \frac{1}{5} \times (-4) \times 15 \times \frac{1}{\pi}$.

الحل:

$$\pi \times \frac{1}{5} \times (-4) \times 15 \times \frac{1}{\pi} = \left(\pi \times \frac{1}{\pi}\right) \times \left(15 \times \frac{1}{5}\right) \times (-4)$$
$$= 1 \times 3 \times (-4) = -12$$

ثانياً: توزيع الضرب على الجمع في $\mathbb{R}$

نمدِّدُ توزيعَ الضّرب على الجمع في $\mathbb{Q}$ ليشملَ مجموعة الأعداد الحقيقية.

أيّاً كانتِ الأعدادُ الحقيقية a, b, c فإنّ: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$$(b + c) \times a = ba + ca$$
$$a(b - c) = ab - ac$$

تطبيق 1

لتكن لدينا الأعداد الحقيقية a, b, c حيث $a\,b = \sqrt{2}$, $a\,c = -\sqrt{2}$، احسب $a(b + c)$.

الحلّ:

$$a(b + c) = a\,b + a\,c$$
$$= \sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$$

تطبيق 2

بيّن أنّ: $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

الحل:

$\sqrt{5} + \sqrt{5} = 1 \times \sqrt{5} + 1 \times \sqrt{5}$ لماذا ؟

$$= (1 + 1) \times \sqrt{5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

نشـــــاط

بيّن أنّ: $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

الحل:

$\sqrt{5}+\sqrt{5}=1\times\sqrt{5}+1\times\sqrt{5}$ لماذا ؟ الواحد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$

$=(1+1)\times\sqrt{5}$ لأنّ الضرب يقبل التوزيع على الجمع

$=2\sqrt{5}$

تطبيق 3

بيّن أنّ: $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

الحل:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{3}$$
$$=(1+1+1)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

تطبيق 4

بيّن أنّ: $2\sqrt{3}+\frac{1}{5}\sqrt{3}=\frac{11}{5}\sqrt{3}$

الحل:

$$2\sqrt{3}+\frac{1}{5}\sqrt{3}=\left(2+\frac{1}{5}\right)\times\sqrt{3}\quad=\frac{10+1}{5}\times\sqrt{5}=\frac{11}{5}\sqrt{5}$$

حساب ذهني

أوجدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

② $\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

③ $3\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

الحل:

أوجد ناتج كلاً مما يأتي:

$\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

$\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

$3\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

حاول أن تحلّ

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي:

$$2\pi+\frac{1}{3}\pi=\left(2+\frac{1}{3}\right)\pi=\frac{7}{3}\pi$$

$$-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}=\left(-2+\frac{1}{2}-1\right)\sqrt{3}=-\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{11}\times\left(-3\sqrt{11}+2\sqrt{11}\right)=\sqrt{11}\times-\sqrt{11}=-11$$

تــــــذكر

1. التحليل: تحويل المجموع إلى جداء.
النشر: تحويل الجداء إلى مجموع.
2. إذا كان $a>0$ فإنّ:
$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$

ثالثاً: النشر والتحليل في مجموعة الأعداد الحقيقية

تطبيق 1

انشر المقدار $3(4a+b)$.

الحل:

$$3(4a+b)=3\times 4a+3\times b$$
$$=12a+3b$$

تطبيق 2

انشر المقدار $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

الحل:

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=(x-\sqrt{3})\times x+(x-\sqrt{3})\times\sqrt{3}$$
$$=x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{3}x-3=x^2-3$$

حاول أن تحلّ

انشر كلاً من:

① $\left(\sqrt{3}+7\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$
② $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$
③ $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+4\right)$
④ $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
⑤ $\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}-3\right)$
⑥ $(a+b)(c+d)$
⑦ $\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-8)$
⑧ $(a-b)(c-d)$

تطبيق ③ الحل: انشر كلاً من:

① .... $\left(\sqrt{3}+7\right)\left(\sqrt{3}+2\right)=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 2+7\times\sqrt{3}+7\times 2=17+9\sqrt{3}$

② .... $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+x\right)=x\times\sqrt{5}+x\times x+\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times x=x^{2}+2\sqrt{5}x+5$

③ .... $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+4\right)=\sqrt{7}\times\sqrt{7}+\sqrt{7}\times 4-3\times\sqrt{7}-3\times 4=-5+\sqrt{7}$

④ .... $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=x\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=x\,y-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}y-1$

⑤ .... $\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}-3\right)=3\sqrt{2}\times\left(5\sqrt{2}-3\right)-1\times\left(5\sqrt{2}-3\right)=33-14\sqrt{2}$

⑥ .... $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

⑦ .... $\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-8)=x\,(x-8)+\frac{1}{4}(x-8)=x^{2}-\frac{31}{4}x-2$

⑧ .... $(a-b)(c-d)=a(c-d)-b(c-d)=ac-ad-bc+bd$

حلّل المقدار $a\,b+b\,c$

الحل

$$a\,b+b\,c=b(a+c)$$

حاول أن تحلّ

1. حلّل كلاً من: $\left(\sqrt{2}\right)^{2}+5\sqrt{2}$ ، $2x+\frac{4}{3}$ ، $x^{2}+16x$ ، $\sqrt{3}-\sqrt{3}x$

الحل:

$$\sqrt{3}-\sqrt{3}x=\sqrt{3}(1-x)$$

$$x^{2}+16x=x\,(x+16)$$

$$2x+\frac{4}{3}=2\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2}+5\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+5\right)$$

2. حلّل كلاً من:

ⓐ $\sqrt{3}\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+3\right)$

ⓑ $2\left(\sqrt{7}+1\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+1\right)$

ⓒ $ax+ay+bx+by$

الحل

ⓐ........ $\sqrt{3}\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+3\right)$

$$=\left(3+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ⓑ........ $2\left(\sqrt{7}+1\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+1\right)$

$$=\left(\sqrt{7}+1\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)=\left(\sqrt{7}+1\right)\times\frac{7}{3}=\frac{7}{3}\left(\sqrt{7}+1\right)$$

ⓒ........ $ax+ay+bx+by$

$$=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

رابعاً: العنصر الماصّ في $\mathbb{R}$

نشـــاط 1

أكمل: $0\times4=4\times0=0$

$0\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times0=0$

تعلّم

1) أياً كان العدد الحقيقي a فإنّ: $a\times0=0\times a=0$

نقول إنّ العدد صفر هو العنصر الماصّ نسبة إلى عملية الضرب في $\mathbb{R}$.

2) إذا كان $ab=0\,,\,a\neq0$ فإنّ: $b=0$

تطبيق

1. إذا كان $4x=0$ فإنّ: $x=0$ لماذا ؟ لأنّ $4\neq0$
2. إذا كان $\pi x=0$ فإنّ: $x=0$ لماذا ؟ لأنّ $\pi\neq0$
3. إذا كان $\sqrt{2}\left(x-\pi\right)=0$ فإنّ: $x-\pi=0$ لماذا ؟ لأنّ $\sqrt{2}\neq0$ ومنه $x=\pi$
4. إذا كان $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$ فإنّ: $x+\sqrt{2}=0$ لماذا ؟ لأنّ $\sqrt{3}+\sqrt{5}\neq0$ ومنه $x=-\sqrt{2}$

خامساً: القيمة المطلقة لجداء عددين حقيقيين

نشــــــاط1

إذا كان a , b عددين حقيقيين حيث: $a=\pi$, $b=+3$،
فأوجد كلاً من $|ab|$, $|b|$, $|a|$، ثُمّ قارن بين $|a|\cdot|b|$ وَ $|ab|$

الحل:

$$|a|=|\pi|=\pi$$
$$|b|=|+3|=+3$$
$$|ab|=|\pi\times3|=3\pi$$

إذن: $|ab|=|a|\cdot|b|$

نشــــــاط2

إذا كان $a=-\sqrt{2}$, $b=-5$.
فأوجد كلاً من $|ab|$, $|b|$, $|a|$، ثُمّ قارن بين $|a|\cdot|b|$ وَ $|ab|$

الحل:

$$|a|=|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$
$$|b|=|-5|=5$$
$$|ab|=(-\sqrt{2})(-5)=5\sqrt{2}$$
$$|a|\cdot|b|=\sqrt{2}\times5=5\sqrt{2}$$

إذن: $|ab|=|a|\cdot|b|$

تعلّم

$$|ab|=|a|\cdot|b|$$
$$|a^2|=a^2$$
$$|a|^2=a^2$$

حاول أن تحلّ

إذا كان $a=\sqrt{3}-1$ و $b=\sqrt{3}-4$، فأوجد كلاً من $|a|$, $|b|$ واستنتج $|a\,b|$.

الحل:

$|a| = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$

$|b| = |\sqrt{3}-4| = 4-\sqrt{3}$

لكن $|ab| = |a|\cdot|b|$

إذن $|ab| = (\sqrt{3}-1)(4-\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}-7$

سادساً: الضرب والجذر التربيعي

أ- الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب

تـــذكّر

الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب a هو العدد الحقيقي الموجب b بحيث: $b^2 = a$

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد:

أ. نحلّلُ العدد إلى عوامله الأولية.

ب. نكتب العدد على شكل جداء قوى لهذه العوامل.

ﺣ. إذا كانت أسسُ هذه القوى زوجيةً نقسم كلّ أسّ على 2 فنحصل على الجذر التربيعي لذلك العدد.

نشـــاط

1) احسب كلاً من: $\sqrt{7^2\times 5^4}$, $(\sqrt{12})^2$, $(\sqrt{2})^2$, $\sqrt{\frac{25}{16}}$, $\sqrt{9}$

2) أوجد الجذر التّربيعيّ لكلّ من الأعداد الآتية: π^2 , $\frac{1}{16}$, 0.25

3) إذا كان $a^2 = 3^2$ فإنّ: $a = 3$ أو $a = -3$.

$a^2 = (-5)^2$ فإنّ: $a = ...$ أو $a = ...$.

إذا كان $a^2 = \pi^2$ فإنّ: $a = ...$ أو $a = ...$.

إذا كان $a^2 = 2$ فإنّ: $a = ...$ أو $a = ...$.

الحل:

(1

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\times\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$

$(\sqrt{12})^2 == \sqrt{12}\times\sqrt{12} = \sqrt{144} = 12$

$\sqrt{7^2\times 5^4} = 7\times 5^2 = 7\times 5\times 5 = 175$

(2

$$\sqrt{0.25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\sqrt{\pi^2} = \pi$$

(3 إذا كان $a^2 = 3^2$ فإنّ: $a = 3$ أو $a = -3$.

$a^2 = (-5)^2$ فإنّ: $a = -5$ أو $a = 5$.

إذا كان $a^2 = \pi^2$ فإنّ: $a = \pi$ أو $a = -\pi$.

إذا كان $a^2 = 2$ فإنّ: $a = \sqrt{2}$ أو $a = -\sqrt{2}$.

تعلّم

1. إذا كان a , b عددين حقيقيين فإنّ: $a^2 = b^2$ تعني $(a = b$ أو $a = -b)$
2. إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإنّ: $a^2 = b^2$ تعني $(a = b)$.
3. إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإنّ: $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ تعني $a = b$.

تطبيق

أوجد العدد الحقيقي الموجب x فيما يأتي:

① $\sqrt{x} = \sqrt{2}$, ② $\sqrt{x + \frac{1}{3}} = \sqrt{9}$

الحلّ:

① $\sqrt{x} = \sqrt{2}$ تعني $x = 2$

② $\sqrt{x + \frac{1}{3}} = \sqrt{9}$ تعني $x + \frac{1}{3} = 9$ ومنه $x = \frac{26}{3}$

حاول أن تحلّ

أوجد العدد الحقيقي الموجب x فيما يأتي: ② $\sqrt{x+1} = 2$, ① $\sqrt{x+3} = \sqrt{5}$

الحل:

① $\sqrt{x+3} = \sqrt{5}$

وتعني $x + 3 = 5$ ومنه $x = 5 - 3$ أي $x = 2$

② $\sqrt{x+1}=2$

وتعني $x+1=\sqrt{4}$ ومنه $x+1=4$ أي $x=3$

ملاحظة: يمكن الحل بأخذ مربع الطرفين.

ب- الجذر التربيعي لجداء عددين حقيقيين

نشـــاط

1) أوجد كلاً من: $\sqrt{4}\times\sqrt{16}$, $\sqrt{64}$ ثُمّ قارن بينهما.

2) أوجد كلاً من: $\sqrt{9}\times\sqrt{25}$, $\sqrt{225}$ ثُمّ قارن بينهما.

الحل:

1) أوجد كلاً من: $\sqrt{4}\times\sqrt{16}$, $\sqrt{64}$ وقارن بينهما.

$$\sqrt{64}=8$$

$$\sqrt{4}\times\sqrt{16}=2\times4=8$$

أي أنّ $\sqrt{64}=\sqrt{4}\times\sqrt{16}$

2) أوجد كلاً من: $\sqrt{9}\times\sqrt{25}$, $\sqrt{225}$ وقارن بينهما.

$$\sqrt{225}=15$$

$$\sqrt{9}\times\sqrt{25}=3\times5=15$$

أي أنّ $\sqrt{225}=\sqrt{9}\times\sqrt{25}$

تعلّم

إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإنّ: $\sqrt{a\,b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

تطبيق

بسّط كلاً من: $\sqrt{45}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{8}$.

الحلّ:

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

مثال

بسّط كلاً ممّا يأتي: $\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{12}$ ، $\sqrt{8}+\sqrt{32}$.

الحلّ:

1. نُبسِّط كلّ جذر:

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$$

إذن:

$$\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{12}=3\sqrt{3}-5\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$

$$=(3-5+2)\times\sqrt{3}=0\times\sqrt{3}=0$$

2. $\sqrt{8}+\sqrt{32}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\;=(2+4)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

حاول أن تحلّ

بسِّط كلاً من C , B , A حيث:

① $A=\sqrt{50}+\sqrt{32}$, ② $B=\sqrt{32}-\sqrt{162}+\sqrt{50}$, ③ $C=\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{63}$

الحلّ:

① $A=\sqrt{50}+\sqrt{32}$

$=5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}$

② $B=\sqrt{32}-\sqrt{162}+\sqrt{50}$

$=4\sqrt{2}-9\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$=(4-9+5)\sqrt{2}=0\times\sqrt{2}$

$=0$

③ $C=\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{63}$

$=(2+1-3)\sqrt{7}=0$

جـ- الجذر التربيعي لمربع عدد حقيقي

نشاط

أوجد كلاً من: $\sqrt{(-15)^2}$, $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$

الحل:

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(-15)^2} = \sqrt{225} = 15$$

نستنتجُ من النّشاط السّابق أنّ: $\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$.

تعلّم

- إذا كان العدد الحقيقي a موجباً فإنّ: $\sqrt{a^2} = a$.
- إذا كان x عدداً حقيقياً فإنّ: $\sqrt{x^2} = |x|$.

تطبيق

أوجد حل كلّ من المعادلات الآتية:

تــذكّر

حلّ المعادلة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي كلٌّ من عناصرها يحقّق المعادلة.

1) $\sqrt{x^2} = 2$.

نعلم أنّ: $\sqrt{x^2} = |x|$ **إذن:** $|x| = 2$ ومنه $x = 2$ أو $x = -2$. مجموعة الحلول هي:$\{-2, 2\}$

2) $\sqrt{(x-1)^2} = 8$.

نعلم أنّ: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ **إذن:** $|x-1| = 8$ ومنه إمّا $x - 1 = 8$ أي أنّ $x = 9$

وإمّا $x - 1 = -8$ أي أنّ $x = -7$.

مجموعة الحلول هي:$\{9, -7\}$

3) $\sqrt{(x-\pi)^2} = \pi$.

نعلم أنّ: $\sqrt{(x-\pi)^2} = |x-\pi|$ **إذن:** $|x-\pi| = \pi$ ومنه إمّا $x - \pi = \pi$ أي أنّ $x = 2\pi$

وإمّا $x - \pi = -\pi$ أي أنّ $x = 0$

مجموعة الحلول هي: $\{0, 2\pi\}$



3 - 5 القســـمة في مجموعـــة الأعــــداد الحقيقيـــة



سوف تتعلّم

- قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي آخر لا يساوي الصفر.
- إيجاد القيمة المطلقة لحاصل قسمة عددين حقيقيين.
- إيجاد الجذر التربيعي لحاصل قسمة عددين حقيقيين.

أولاً: قسمة عدد حقيقي على آخرَ

مثال

ليكن لدينا العددان النسبيّان $b=\frac{2}{3}$, $a=\frac{-4}{7}$ فإنّ:

$$a\div b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}=\frac{-4}{7}\times\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{-4}{7}\times\frac{3}{2}=\frac{-6}{7}$$

تعلّم

- إذا كان a , b عددين نسبيّين فإنّ: $a\div b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$
- إذا كان $\frac{a}{b} , \frac{c}{d}$ عددين نسبيّين فإنّ: $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

نمدّد ما سبق ليَشْمَل مجموعة الأعداد الحقيقية

تطبيق

إذا كان $a=\frac{-2}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{5}$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$.

الحل: $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}=\frac{-2}{\sqrt{2}}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{-2\times5}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{-10}{2}=-5$

حاول أن تحلّ

إذا كان $a=\frac{2}{\pi}$, $b=\frac{3}{5\pi}$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$.

الحل:

إذا كان $a=\frac{2}{\pi}$, $b=\frac{3}{5\pi}$ ، أوجد $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{5\pi}}{\frac{2}{\pi}}=a\times\frac{1}{b}=\frac{2}{\pi}\times\frac{5\pi}{3}=\frac{10}{3}$$

ثانياً- إزالة الجذر من المقام

مثال

أزِل الجذر من المقام: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الحل:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تعلّم

لإزالة الجذر من مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ نضرب بسط الكسر ومقامه بالعدد $\sqrt{b}$

تطبيق

أزل الجذر من مقام كلّ من: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{9}{\sqrt{21}}$.

الحل

$$\frac{9}{\sqrt{21}}=\frac{9\times\sqrt{21}}{\sqrt{21}\times\sqrt{21}}=\frac{9\sqrt{21}}{21}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حاول أن تحلّ

أوجد حلّ المعادلة $\sqrt{6}\,x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ في $\mathbb{R}$.

الحل

$$\sqrt{6}\,x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

ومنه $x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

ثالثاً: مجموع ناتجي قسمة

تعلّم

إذا كانت: a وَ b وَ c وَ d أربعة أعداد نسبية

وَ $b \neq 0$ وَ $d \neq 0$ فإنّ:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{وَ} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

نمدّد ذلك ليشمل مجموعة الأعداد الحقيقية.

تطبيق

أوجد ناتج الآتي: $\frac{2}{7} + \frac{3}{\sqrt{5}}$

الحل:

طريقة أولى:

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{7}} + \frac{2}{\frac{7}{\sqrt{5}}} = \frac{3\times7+2\sqrt{5}}{7\sqrt{5}} = \frac{21+2\sqrt{5}}{7\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(21+2\sqrt{5})}{7\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}+10}{35}$$

طريقة ثانية:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} + \frac{2}{7} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{7} + \frac{\frac{2}{7}}{5} = \frac{21\sqrt{5}+10}{35}$$

رابعاً: القيمة المطلقة لقسمة عدد حقيقي على آخر لا يساوي الصفر.

نشـــاط

إذا كان $a=-\sqrt{3}$ وَ $b=\pi$، فأوجد ناتج كلّ من $\left|\frac{a}{b}\right|$, $\frac{|a|}{|b|}$ ثُمَّ قارن بينهما.

الحل:

أكمل: $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}}{\pi}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

$|a|=\sqrt{3}$

$|b|=\pi$

ومنه $\frac{|a|}{|b|}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

استنتج: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

تعلّم

إذا كان a وَ b عددين حقيقيين حيث $b\neq 0$ فإنّ: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

تطبيق

ليكن $a=-3\sqrt{2}$, $b=12\sqrt{8}$، أوجد كلاً من: $|a|$ وَ $|b|$ واستنتج قيمة $\left|\frac{a}{b}\right|$.

الحل:

$|a|=\left|-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$

$|b|=\left|12\sqrt{8}\right|=12\sqrt{8}=24\sqrt{2}$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=\frac{3\sqrt{2}}{24\sqrt{2}}=\frac{1}{8}$

حاول أن تحلّ

أوجدِ القيمةَ المطلقة لـ x إذا علمت أنّ $\left|\frac{x}{-\sqrt{3}}\right| = 4$.

الحل:

$$\left|\frac{x}{-\sqrt{3}}\right| = 4$$

$$\frac{|x|}{\left|-\sqrt{3}\right|} = 4$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{3}} = 4$$

ومنه $|x| = 4\sqrt{3}$

خامساً: الجذر التربيعي لقسمة عدد حقيقي على آخر لا يساوي الصفر.

مثال

إذا كان: $a = 5$ وَ $b = 4$، فقارن بين $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ وَ $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ ماذا تستنتج ؟

الحل:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

إذن: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$

نستنتج: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

تعلّم

إذا كان a وَ b عددين حقيقيين موجبين وَ $b \neq 0$ فإنّ: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

تطبيق

اختصر كلاً من: $\sqrt{\frac{36}{25}}$, $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}}$, $\frac{\sqrt{7\pi}}{\sqrt{4\pi}}$

الحل

$$\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{6}{18}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{7\pi}}{\sqrt{4\pi}}=\sqrt{\frac{7\pi}{4\pi}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

حاول أن تحلّ

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة: $\sqrt{\frac{9}{16}}$ ، $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ ، $\frac{\sqrt{8\sqrt{2}}}{\sqrt{9\sqrt{2}}}$.

الحل

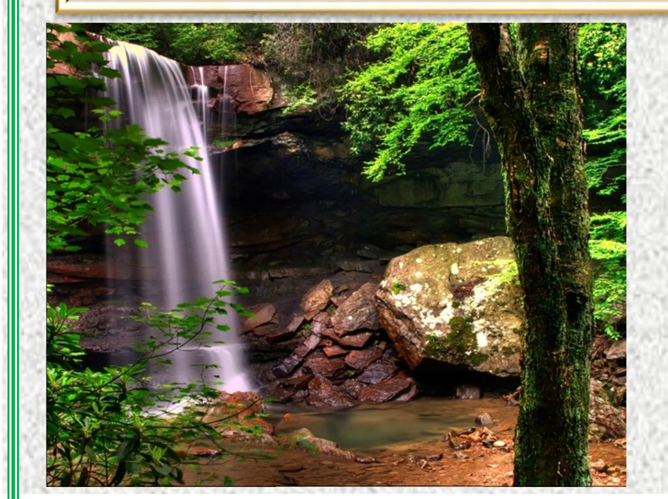
$$\frac{\sqrt{8\sqrt{2}}}{\sqrt{9\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{8}{72}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$$



3 - 6 القـــــوى في مجموعـــة الأعــــداد الحقيقيـــة



سوف تتعلّم

- القوى في مجموعة الأعداد الحقيقية.
- إشارةَ ناتج قوّة.
- خواص القوى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

أولاً: قوّة عدد حقيقي

تــذكّر

إذا كان a عدداً نسبياً لا يساوي الصفر وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإنّ:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

نشـــاط 1

أكمل على شكل قوّة كلاً من:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right)\times\left(\frac{-2}{5}\right)\times\left(\frac{-2}{5}\right)=\left(\frac{-2}{5}\right)^3$$

$$\frac{-1}{27}=\left(\frac{-1}{3}\right)^3$$

$$\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

نشـــاط 2

يُكتب العدد $\frac{1}{25}$ على شكل قوّة أساسها موجب كما يأتي $\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}=5^{-2}$

اكتبِ العدد $\frac{1}{32}$ على شكل قوّة.

$$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$$

تعلّم

أيّاً كان العدد النسبي a وأيّاً كان العدد الطبيعي n حيث $n \neq 0$ فإنّ:

1. $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n \text{ مرّة}}$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

أيّاً كان العدد النسبي a لا يساوي الصفر فإنّ: $a^0 = 1$

نمدّد ذلك ليشملَ مجموعة الأعداد الحقيقية.

اكتب العدد $x = \left(\frac{-3}{5}\right)^4$ على شكل عدد نسبي:

الحل:

$$x = \left(\frac{-3}{5}\right)^4 = \frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5} = \frac{81}{625}$$

تطبيق

اكتب على شكل قوّة كلاً من:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^4$$

$$\frac{-2}{\sqrt{3}} \times \frac{-2}{\sqrt{3}} \times \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-(2)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$$

$$(-\pi)(-\pi)(-\pi)(-\pi)(-\pi) = -\left(\sqrt{\pi}\right)^6$$

تدريب

1. أوجدِ العددَ النّسبيّ a إذا علمت أنّه قوّة أساسها $\frac{-3}{5}$ وأسّها 4.
2. احسب كلاً من: $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$, $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^4$, $(-\pi)^1$, $\left(-\sqrt{3}\right)^0$

الحل:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^0 = 1$$

$$(-\pi)^1 = -\pi$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^4 = \sqrt{\frac{2}{7}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{4}{49}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{7}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}$$

تحقّق من فهمك

هل يُكتَبُ العدد $2\sqrt{2}$ على شكل قوّة أساسها $\sqrt{2}$ وأسّها 3 ؟ وكيف ؟

الحل:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3$$

ثانياً: إشارة ناتج قوّة عدد حقيقي

مثال

ما إشارة ناتج كل من: $(2)^{-3}$,$\left(-\sqrt{2}\right)^3$, $\left(-\sqrt{3}\right)^4$, $(4)^2$ ؟

الحل:

$$(4)^2 = (4) \times (4) = +16$$

إذن إشارة النّاتج موجبة.

$$\left(-\sqrt{3}\right)^4 = \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) = +9$$

إذن إشارة النّاتج موجبة.

$$\left(-\sqrt{2}\right)^3 = \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

إذن إشارة النّاتج سالبة.

$$(2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

إذن: إشارة النّاتج موجبة.

تعلّم

- قوة أيّ عدد حقيقي موجب تماماً موجبة.
- قوةَ أيّ عدد حقيقي سالب تماماً:
  أ. موجبة إذا كان أسها زوجياً.
  ب. سالبة إذا كان أسها فردياً.

تطبيق

إشارة العدد $\left(-\sqrt{7}\right)^{100}$ موجبة لأنّ أسها عدد زوجي.

إشارة العدد $\left(-\sqrt{2}\right)^{1001}$ سالبة لأنّ الأس عدد فردي، والأساس سالب.

إشارة العدد $\left(\sqrt{5}\right)^{213}$ موجبة لأنّ أساسها عدد موجب.

ثالثاً: خواص القوى في الأعداد الحقيقية

1- قوة جداء عددين حقيقيين

مثال

إذا كان $x=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)^4$ فبيّن أنّ $x=y$.

الحل:

$$x=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)$$ لأنّ الضرب تبديلي وتجميعي

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{5}\right)^4=y$$

نشـــــاط

اختصر كلاً من: $\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)^{-2}$, $\left(\sqrt{5}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$ ثُمّ قارن بينهما.

الحل:

$$\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{2}\times\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{1}{5\times3}=\frac{1}{15}$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{2}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{1}{5\times3}=\frac{1}{15}$$

بالمقارنة نجد: $\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)^{-2}=\left(\sqrt{5}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$

تعلّم

أيّاً كان العددان الحقيقيان a , b وأيّاً كان العدد الصحيح n حيث $(a\neq0\,,\,b\neq0\,,\,n\neq0)$ فإنّ:

$$(a\times b)^n=a^n\times b^n$$

تطبيق

اكتب كلاً من a , b , c على شكل قوّة:

$$a=\left(\sqrt{3}\right)^{5}\times\left(2\sqrt{3}\right)^{5}\quad,\quad b=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}\quad,\quad c=\pi^{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{4}$$

الحل:

$$a=\left(\sqrt{3}\right)^{5}\times\left(2\sqrt{3}\right)^{5}=\left(\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\right)^{5}=\left(2\times3\right)^{5}=6^{5}$$

$$b=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}=\left(\frac{2}{2}\right)^{12}=1$$

$$c=\pi^{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{4}=\left(\pi\times\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{4}=\left(\sqrt{2}\right)^{4}=2^{2}$$

حاول أن تحلّ

أوجد ناتج ما يأتي بأبسط صورة: $\left(\sqrt{6}\right)^{-3}\times\left(\sqrt{24}\right)^{-3}$



الحل

$$(\sqrt{6})^{-3} \times (\sqrt{24})^{-3} = (\sqrt{6} \times \sqrt{24})^{-3} = (12)^{-3} = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$$

2- جداء قوتين لهما الأساس ذاته

مثال

بيّن أنّ $\left(\sqrt{2}\right)^{-3} \times \left(\sqrt{2}\right)^{5} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3+5}$

الحل

$$\left(\sqrt{2}\right)^{-3} \times \left(\sqrt{2}\right)^{5} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{3}} \times \left(\sqrt{2}\right)^{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{-3+5}$$

تعلّم

أيّاً كان العدد الحقيقي $a \neq 0$ وأيّاً كان العددان الصحيحان m, n فإنّ:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

تطبيق

اكتب كلاً ممّا يأتي على شكل قوّة أساسها عدد حقيقي:

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4+7} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{11}$$

$$b = \sqrt{13} \times \left(\sqrt{13}\right)^{6} = \left(\sqrt{13}\right)^{1+6} = \left(\sqrt{13}\right)^{7}$$

$$c = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{7} \times \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{-5} = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{7-5} = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{2}$$

3- قوة القوة لعدد حقيقي

نشـــاط

اكتب $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^3\right]^2$ على شكل قوّة أساسها $\frac{\pi}{7}$، ماذا نلاحظ ؟

الحل:

$$\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^3\right]^2=\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]^2$$

$$=\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]\times\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{7}\times\frac{\pi}{7}\times\frac{\pi}{7}\times\frac{\pi}{7}\times\frac{\pi}{7}\times\frac{\pi}{7}$$ لأنّ: الضرب عملية تجميعية

$$=\left(\frac{\pi}{7}\right)^6$$

أحظ أنّ: $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^3\right]^2=\left(\frac{\pi}{7}\right)^{3\times2}=\left(\frac{\pi}{7}\right)^6$

مثال

قارن بين $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-2}\right]^7$ وَ $\left(\sqrt{3}\right)^{-14}$

الحل: $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

إذن: $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-2}\right]^7=\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1^7}{3^7}=\frac{1}{3^7}$

و $\left(\sqrt{3}\right)^{-14}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{14}}=\frac{1}{\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^7}=\frac{1}{3^7}$

نستنتج أنّ $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-2}\right]^7=\left(\sqrt{3}\right)^{-2\times7}$

تعلّم

أيّاً كان العدد الحقيقي $a \neq 0$ وأيّاً كان العددان الصحيحان n , m فإنّ: $(a^n)^m = a^{n\times m}$

تطبيق

اكتب كلاً ممّا يأتي على شكل قوّة أساسها عدد طبيعي:

$$\left(\left(\sqrt{5}\right)^{-3}\right)^{-4} , \left(\left(\sqrt{3}\right)^{5}\right)^{-6} , \left(-\left(\sqrt{11}\right)^{3}\right)^{32}$$

الحل:

$$\left(\left(\sqrt{5}\right)^{-3}\right)^{-4} = \left(\sqrt{5}\right)^{12} = \left(\left(\sqrt{5}\right)^{2}\right)^{6} = 5^6$$

$$\left(\left(\sqrt{3}\right)^{5}\right)^{-6} = \left(\sqrt{3}\right)^{-30} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{30}} = \frac{1}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2}\right)^{15}} = \frac{1}{3^{15}} = (3)^{-15}$$

$$\left(-\left(\sqrt{11}\right)^{3}\right)^{32} = \left(-\sqrt{11}\right)^{96} = \left(\sqrt{11}\right)^{96} = \left(\left(\sqrt{11}\right)^{2}\right)^{48} = (11)^{48}$$

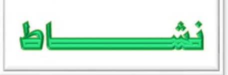
حاول أن تحلّ

مكعب طول حرفه: $a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، أوجد حجم هذا المكعب.

الحل: حجم المكعب $= a^3$

$$a^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 = \frac{25\sqrt{5}}{27}$$

4- قوة ناتج القسمة لعدد حقيقي على عدد حقيقي آخرَ مغاير للصفر



أكمل ما يأتي:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{7\times7\times7\times7\times7} = \frac{(3)^5}{(7)^5}$$

أي أنّ $\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \frac{3^5}{7^5}$



تعلّم

أيّاً كان العددُ الحقيقيُ a وأيّاً كان العدد الحقيقي b المغاير للصفر وكان العدد الصحيح n فإنّ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

تطبيق

اكتب العدد $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^6$ على شكل قوّة أساسها عدد نسبي

الحل

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^6 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^6}{\left(\sqrt{11}\right)^6} = \frac{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3}{\left(\left(\sqrt{11}\right)^2\right)^3} = \frac{2^3}{11^3} = \left(\frac{2}{11}\right)^3$$

حاول أن تحلّ

1. اختصر كلاً من: $\frac{\left(3\pi\right)^7}{\left(15\pi\right)^7}$ ، $\frac{\left(\sqrt{14}\right)^5}{\left(\sqrt{28}\right)^5}$.

الحل:

$$\frac{\left(\sqrt{14}\right)^5}{\left(\sqrt{28}\right)^5} = \left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{28}}\right)^5 = \left(\sqrt{\frac{14}{28}}\right)^5 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^5}$$

$$\frac{\left(3\pi\right)^7}{\left(15\pi\right)^7} = \left(\frac{3\pi}{15\pi}\right)^7 = \left(\frac{1}{5}\right)^7 = \frac{1}{5^7}$$

2. اكتب كلاً مما يأتي على شكل قوّة أساسها عدد حقيقي: $\frac{a^3}{5\sqrt{5}}$ ، $\frac{b^5}{32}$.

الحل:

$$\frac{b^5}{32} = \frac{b^5}{2^5} = \left(\frac{b}{2}\right)^5$$

$$\frac{a^3}{5\sqrt{5}} = \frac{a^3}{\left(\sqrt{5}\right)^3}\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^3$$

تمرينات الوحدة

1. إذا كان a, b عددين حقيقيين حيث: $a+b=1.3$، فاحسب $3.5-a-b$.

الحل:

$$3.5-a-b=3.5-(a+b)=3.5-1.3=2.2$$

2. أوجد قيمة x فيما يأتي:

ⓐ $|x-\sqrt{3}|=0$, ⓑ $|x+\sqrt{15}|=0$, ⓒ $|x|=\sqrt{2}$

الحل:

ⓐ $|x-\sqrt{3}|=0$ تعني $x-\sqrt{3}=0$ ومنه $x=\sqrt{3}$

ⓑ $|x+\sqrt{15}|=0$ تعني $x+\sqrt{15}=0$ ومنه $x=-\sqrt{15}$

ⓒ $|x|=\sqrt{2}$ تعني $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

3. انشر كلاً ممّا يأتي:

$$a=(2-\sqrt{7})\times\sqrt{7} \quad , \quad b=(\sqrt{3}-1)(7-\sqrt{3})$$

الحل:

$$a=(2-\sqrt{7})\times\sqrt{7} \quad =2\sqrt{7}-7$$

$$b=(\sqrt{3}-1)(7-\sqrt{3}) =(\sqrt{3}-1)\times 7+(\sqrt{3}-1)\times -\sqrt{3}$$
$$=7\sqrt{3}-7-3+\sqrt{3}$$
$$=8\sqrt{3}-10$$

4. حلّل كلاً مما يأتي:

$$A=4a-4b+4c \quad , \quad B=3a-9b+3c \quad , \quad C=4\sqrt{2}a+8b-12c$$

الحل:

$$A=4a-4b+4c \quad =4(a-b+c)$$
$$B=3a-9b+3c \quad =3(a-3b+c)$$
$$C=4\sqrt{2}a+8b-12c \quad =4(\sqrt{2}a+2b-3c)$$

5. اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

$$A=\sqrt{63}-\sqrt{112}+\sqrt{700} \quad , \quad B=\sqrt{99}-10\sqrt{1100}+6\sqrt{396}$$

$$C=2\sqrt{63}-5\sqrt{28}+\sqrt{112} \quad , \quad D=-\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}$$

الحل:

$$A=\sqrt{63}-\sqrt{112}+\sqrt{700}=3\sqrt{7}-4\sqrt{7}+10\sqrt{7}=9\sqrt{7}$$

$$B=\sqrt{99}-10\sqrt{1100}+6\sqrt{396}=3\sqrt{11}-100\sqrt{11}+108\sqrt{11}=11\sqrt{11}$$

$$C=2\sqrt{63}-5\sqrt{28}+\sqrt{112}=6\sqrt{7}-10\sqrt{6}+4\sqrt{7}=0$$

$$D=-\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}=-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$$

6. اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

① $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$, ② $\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{7}}{\sqrt{2}\times\sqrt{14}}$, ③ $\sqrt{\frac{7}{3}}+4\sqrt{\frac{63}{75}}-2\sqrt{\frac{28}{27}}$

الحل:

① $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{20}{45}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

② $\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{7}}{\sqrt{2}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{4\times7}}{\sqrt{2\times14}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{28}}=1$

③ $\sqrt{\frac{7}{3}}+4\sqrt{\frac{63}{75}}-2\sqrt{\frac{28}{27}}=\sqrt{\frac{7}{3}}+4\times\frac{3\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}-2\times\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}=\left(1+\frac{12}{5}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{31}{15}\sqrt{\frac{7}{3}}$

7. أزِلِ الجذرَ التربيعيّ من مقام كل مما يأتي:

$\sqrt{\frac{7}{4}}$, $\sqrt{\frac{11}{64}}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{10}}$, $\frac{-7}{\sqrt{21}}$, $\frac{26}{\sqrt{13}}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{11}{64}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{1}}{8}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$



$$\frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-1\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$$

$$\frac{-7}{\sqrt{21}} = \frac{-7\times\sqrt{21}}{\sqrt{21}\times\sqrt{21}} = \frac{-\sqrt{21}}{3}$$

$$\frac{26}{\sqrt{13}} = \frac{26\times\sqrt{13}}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$$

8. اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

$$\sqrt{\frac{27}{5}}\times\sqrt{\frac{10}{3}} \quad , \quad \sqrt{15}\times\sqrt{\frac{24}{90}} \quad , \quad \sqrt{3}\times\sqrt{\frac{3}{7}}\times\sqrt{\frac{8}{7}}$$

الحل:

$$\sqrt{\frac{27}{5}}\times\sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{27\times10}{5\times3}} = \sqrt{9\times2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{15}\times\sqrt{\frac{24}{90}} = \sqrt{15\times\frac{24}{90}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{3}{7}}\times\sqrt{\frac{8}{7}} = \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{8}}{7} = \frac{6\sqrt{2}}{7}$$

9. اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

$$a = \left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{7} \quad , \quad b = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{7}}{\left(\sqrt{3}\right)^{5}} \quad , \quad c = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^{7}}$$

الحل:

$$a = \left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{7} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2+7} = \left(\sqrt{2}\right)^{5} = 4\sqrt{2}$$

$$b = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{7}}{\left(\sqrt{3}\right)^{5}} = \left(\sqrt{3}\right)^{7-5} = \left(\sqrt{3}\right)^{2} = 3$$

$$c = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^{7}} = \left(\sqrt{5}\right)^{5-7} = \left(\sqrt{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{2}} = \frac{1}{5}$$

10. بيّن أنّ: $\left(\sqrt{2}\right)^{-3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

الحل:



$$\left(\sqrt{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

.11 اكتب كلاً ممّا يأتي على شكل قوّة أساسها عدد نسبي:

$$(-2)^3\times(-5)^3 \quad , \quad \left(\frac{13}{5}\right)^4\times\left(\frac{10}{13}\right)^4$$

الحل:

$$(-2)^3\times(-5)^3 = (-2\times-5)^3=10^3$$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^4\times\left(\frac{10}{13}\right)^4 = \left(\frac{13\times10}{5\times13}\right)^4 = 2^4$$

.12 اكتب كلّ عبارة من العبارات الآتية على شكل: $a^n\cdot b^m\cdot c^p$

① $a^4\times b^6\times a^8\times c^6\times b^5$, ② $\left(a\times b^4\times c^7\right)^2\times\left(a^5\times b^{15}\times c^3\right)^{-3}$

③ $\dfrac{a^8\times b^{-2}\times c^{-17}}{a^4\times b^2\times c^{-9}}$

الحل:

① $a^4\times b^6\times a^8\times c^6\times b^5 = a^{12}b^{11}c^6$

② $\left(a\times b^4\times c^7\right)^2\times\left(a^5\times b^{15}\times c^3\right)^{-3} = a^2b^8c^{14}a^{-15}b^{45}c^{-9} = a^{-13}b^{-37}c^5$

③ $\dfrac{a^8\times b^{-2}\times c^{-17}}{a^4\times b^2\times c^{-9}} = \dfrac{a^8}{a^4}\times\dfrac{b^{-2}}{b^2}\times\dfrac{c^{-17}}{c^{-9}} = a^4b^{-4}c^{-8}$

.13 أوجد إشارة قيمة كلّ قوّة مما يأتي:

$$\left(\frac{-11}{25}\right)^{-333} , \left(-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^{-20} , \left(\frac{-7}{\sqrt{11}}\right)^{4001} , \left(\frac{-\sqrt{2}}{9}\right)^{-2013} , \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{-359}$$

الحل:

$$\left(\frac{-11}{25}\right)^{-333} = \frac{1}{\left(\frac{-11}{25}\right)^{333}}$$

إذن الإشارة سالبة



$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^{-20} = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^{20}}$$

إذن الإشارة موجبة

$$\left(\frac{-7}{\sqrt{11}}\right)^{4001}$$

الإشارة سالبة لأن الأساس سالب والأس فردي موجب

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{9}\right)^{-1997} = \frac{1}{\left(\frac{-\sqrt{2}}{9}\right)^{1997}}$$

إذن الإشارة سالبة

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{-359} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{359}}$$

إذن الإشارة موجبة

14. انشر كلاً ممّا يأتي واكتب النّاتج في أبسط صورة:

$$\left(\sqrt{3}+4\right)^2 \ , \ \left(\sqrt{3}+2\right)^2 \ , \ \left(\sqrt{2}+7\right)\left(\sqrt{2}-7\right) \ , \ (2x+\pi)(2x-\pi) \ , \ \left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$$

الحل:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+4\right)^2 &= \left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt{3}+4\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+4\right)+4\left(\sqrt{3}+4\right)\\ &= 3+4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+16\\ &= 19+8\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+2\right)^2 &= \left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)+2\left(\sqrt{3}+2\right)\\ &= 3+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\\ &= 7+4\sqrt{3}\end{aligned}$$



$$\left(\sqrt{2}+7\right)\left(\sqrt{2}-7\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-7\right)+7\left(\sqrt{2}-7\right)$$
$$= 2-7\sqrt{2}+7\sqrt{2}-49$$
$$= -47$$

$$(2x+\pi)(2x-\pi) = 2x(2x-\pi)+\pi(2x-\pi)$$
$$= 4x^2-2\pi x+2\pi x-\pi^2$$
$$= 4x^2-\pi^2$$

$$\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right) = 2\left(2+3\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}\left(2+3\sqrt{2}\right)$$
$$= 4+6\sqrt{2}-6\sqrt{2}-18$$
$$= -14$$

الوحـــــــدة الثّالثـــــــة

الأعداد الحقيقيّة

1. احسب كلاً من:

① $\sqrt{3+\sqrt{1}} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

② $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

③ $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+2}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$

2. إذا كان كلاً من x , y عددين حقيقيين حيث: $x - y = \sqrt{3}$، احسب $x - \left(\sqrt{3} + y\right)$

الحل:

$$x - \left(\sqrt{3} + y\right) = x - y - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

3. اختصر كلاً من العبارات الآتية:

$$a = \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{5} = \sqrt{3} - \frac{2}{5}$$

$$b = 2.5 + \left(-\frac{3}{5}\right) + (-\pi) - (-2.5) = 5 - \frac{3}{5} - \pi$$

$$c = \frac{14}{3} - (-4) + (-0.7) - \left(-\sqrt{2}\right) = \frac{14}{3} + 4 - 0.7 + \sqrt{2} = \frac{140+120-21}{30} + \sqrt{2} = \frac{239}{30} + \sqrt{2}$$

4. أوجد قيمة x فيما يأتي:

① $x + \frac{7}{8} = 0$: $x = -\frac{7}{8}$

② $x - \pi = 0$: $x = \pi$

③ $x + \sqrt{2} = 0$: $x = -\sqrt{2}$

④ $x + 17 = 31$: $x = 31 - 17 = 14$

⑤ $x - \frac{1}{4} = 0.7$: $x = 0.7 + 0.25 = 0.95$

⑥ $x + \sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$: $x = \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{5}$

5. إذا كان $a\,,\,b$ عددين حقيقيين اكتب كل عبارة فيما يأتي في أبسط صورة:

$$A=(a+b)-(a-b)-\left(b-\sqrt{3}\right)=a+b-a+b-b+\sqrt{3}=b+\sqrt{3}$$

$$B=(b-a)+\left(\sqrt{3}-b\right)+(a+\pi)=b-a+\sqrt{3}-b+a+\pi=\sqrt{3}+\pi$$

$$C=-(a+b-\pi)-(-a-b+3.14)=-a-b+\pi+a+b-3.14=\pi-3.14$$

6. اكتب كل عبارة فيما يأتي في أبسط صورة:

$$A=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)-\left[-\left(-\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]+\left(-\sqrt{3}+\frac{4}{7}\right)=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{5}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$$

$$B=-\left[+2-(2-\pi)\right]-\left(\sqrt{5}-\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{4}{5}-\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=-2-2+\pi-\sqrt{5}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}=\pi+\sqrt{2}$$

$$C=\left[3-\left(0.5-\pi+\frac{3}{8}\right)\right]-\pi+\frac{3}{8}=3-0.5+\pi-\frac{3}{8}-\pi+\frac{3}{8}=2.5$$

7. أوجد قيمة x في كل معادلة من المعادلات الآتية:

① $|x+7|=\sqrt{7}$, ② $|x+8|=\pi$, ③ $|x-4|=\sqrt{13}$

الحل:

① $|x+7|=\sqrt{7}$ وتعني $x+7=\sqrt{7}$ ومنه $x=\sqrt{7}-7$

أو $x+7=-\sqrt{7}$ ومنه $x=-7-\sqrt{7}$

② $|x+8|=\pi$ وتعني $x+8=\pi$ ومنه $x=\pi-8$

أو $x+8=-\pi$ ومنه $x=-8-\pi$

③ $|x-4|=\sqrt{13}$ وتعني $x-4=\sqrt{13}$ ومنه $x=\sqrt{13}+4$

أو $x-4=-\sqrt{13}$ ومنه $x=-\sqrt{13}+4$

8. إذا كان $a\,,\,b$ عددين حقيقيين حيث $a\cdot b=-2$ احسب قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

$A=4a\times(-6)\times b$, $B=b\times(-3.7)\times -3a$, $C=\sqrt{7}\times a\times -\sqrt{21}\times -b$

الحل:

$$A=4a\times(-6)\times b=-24\times ab=-24\times(-2)=48$$

$$B=b\times(-3.7)\times(-3a)=(-3.7\times -3)\times ab=11.1\times(-2)=-22.2$$

$$C=\sqrt{7}\times a\times\left(-\sqrt{21}\right)\times(-b)=\sqrt{7}\times\left(-\sqrt{21}\right)\times(-ab)=7\sqrt{3}\times(-2)=-14\sqrt{3}$$

.9 حلّل كلاً مما يأتي:

$$D = 3a - 12\sqrt{3}\,b - 15c \qquad = 3\left(a - 4\sqrt{3}\,b - 5c\right)$$

$$E = 5\sqrt{7}\,a - 10b + 5c \qquad = 5\left(\sqrt{7}\,a - 2b + c\right)$$

$$F = 7\sqrt{11}a - 6\sqrt{11}b - \sqrt{44}c \qquad = \sqrt{11}(7a - 6b - 2c)$$

.10 حلّل كلاً من العبارات الآتية:

$$a = \sqrt{2}x - \sqrt{3}x \qquad = x\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$$

$$b = \sqrt{3}x + \sqrt{3}x\,y \qquad = \sqrt{3}\,x\,(1 + y)$$

$$c = 4x^2y - 8x\,y \qquad = 4x\,y\,(x - 2)$$

$$d = \sqrt{5}x^2 - 5x \qquad = \sqrt{5}\,x\left(x - \sqrt{5}\right)$$

$$e = 3\sqrt{2}x^2 - 2x \qquad = \sqrt{2}\,x\,(3x - 2)$$

تذكر أنّ:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

.11 انشر كل عبارة من العبارات الآتية واكتب الناتج في أبسط صورة:

$$A = (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) = x^2 + 2x + x + 2 + x^2 + 3x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 5$$

$$B = 2x(x-5) + (3x-4)(x-5) = 2x^2 - 10x + 3x^2 - 15x - 4x + 20 = 5x^2 - 29x + 20$$

$$C = (3x-7)(2x+3) - 2x - 3 = 6x^2 + 9x - 14x - 21 - 2x - 3 = 6x^2 - 7x - 24$$

$$D = (4x-3)(x-2) + (2-x)(3x-1) = 4x^2 - 8x - 3x + 6 + 6x - 2 - 3x^2 + x = x^2 - 4x + 4$$

.12 حلّل كلاً من العبارات الآتية:

$$A = (2x-5)(3x-2) + 3x - 2 = (3x-2)(2x-5+1)$$

$$= (3x-2)(2x-4) = 2(3x-2)(x-2)$$

$$B = (4x-1)(2x+1) + 8x + 4 = (4x-1)(2x+1) + 4(2x+1)$$

$$= (2x+1)(4x-1+4) = (2x+1)(4x+3)$$

$$C = x\,y + \pi - \pi x - y = x\,(y - \pi) - (y - \pi) = (y - \pi)(x - 1)$$

.13 انشر كل عبارة من العبارات الآتية واكتب الناتج في أبسط صورة:

$$I=\left(\sqrt{2}a+1\right)\left(3\sqrt{2}a+7\right)=6a^2+7\sqrt{2}\,a+3\sqrt{2}\,a+7=6a^2+10\sqrt{2}\,a+7$$

$$J=\left(a\sqrt{3}+4\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)=ab\sqrt{3}+6a+4b+8\sqrt{3}$$

$$K=\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(b-\sqrt{6}\right)=ab-a\sqrt{6}+\frac{1}{2}b\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{18}=ab-a\sqrt{6}+\frac{1}{2}b\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$L=\left(a\sqrt{12}-\sqrt{3}\left(b\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\right)=a\sqrt{12}-3b-6=2a\sqrt{3}-3b-6$$

.14 أوجد طول ضلع المربع الذي مساحته تساوي مساحة مستطيل بعداه 14 وَ 28.

الحل

نفرض طول ضلع المربع x فتكون مساحته x^2

إذن $x^2=28\times 14$

ومنه $x=\sqrt{28}\times\sqrt{14}$

$$=2\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}=14\sqrt{2}$$

.15 اكتب في أبسط صورة كلاً من:

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3\times 6}=\sqrt{36}=6$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{5}\times\sqrt{6}=\frac{1}{4}\sqrt{30}$$

$$\sqrt{20}\times\sqrt{25}=\sqrt{20\times 25}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$$

$$\sqrt{20}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

.16 إذا كان $a=\frac{1}{3}\,,\,b=-\frac{1}{2}$ فاحسب كلاً من:

① .... $6+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6+3-2=7$

② .... $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}}-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{3}\times-\frac{6}{1}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}=-2+\frac{3}{5}=\frac{-7}{5}$

.17 لتكن العبارة: $A=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ احسب قيمة A في كلٍّ حالة من الحالات الآتية:

① $x=\sqrt{3}$: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$

② $x=-\sqrt{3}$: $A=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-1$

③ $x=0$: $A=\dfrac{0}{\sqrt{3}}=0$

④ $x=1$: $A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $x=\sqrt{6}$: $A=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{6}{3}}=\sqrt{2}$

⑥ $x=\dfrac{1}{\sqrt{12}}$: $A=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{12}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{12}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{36}}=\dfrac{1}{6}$

⑦ $x=\dfrac{-1}{\sqrt{15}}$: $A=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{15}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{\sqrt{15}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{\sqrt{45}}=\dfrac{-1}{3\sqrt{5}}$

.18 إذا كانت a,b,c ثلاثة أعداد حقيقية وكلّ منها لا يساوي الصّفر ومجموع أيّ اثنين منها لا يساوي الصفر ومجموعها لا يساوي الصفر بيّن أنّ: $\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{b+c}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{c+a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{c}{a+b}}=2$

الحل:

$$L_1=\frac{1}{1+\dfrac{a}{b+c}}+\frac{1}{1+\dfrac{b}{c+a}}+\frac{1}{1+\dfrac{c}{a+b}}=\frac{1}{\dfrac{b+c+a}{b+c}}+\frac{1}{\dfrac{c+a+b}{c+a}}+\frac{1}{\dfrac{a+b+c}{a+b}}$$

$$=\frac{b+c}{b+c+a}+\frac{c+a}{c+a+b}+\frac{a+b}{a+b+c}\quad=\frac{b+c+c+a+a+b}{b+c+a}$$

$$=\frac{2a+2b+2c}{b+c+a}\quad=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2=L_2$$

.19

أ. اكتب في أبسط صورة كلاً من A,B حيث: $B=3\sqrt{\frac{27}{16}}+5\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{12}$, $A=5\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{32}$

الحل:

$$A=5\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{32}\quad =10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

$$B=3\sqrt{\frac{27}{16}}+5\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{12}=3\sqrt{\frac{27}{16}}+5\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{12}$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+5\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}+10\sqrt{3}-16\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ب. اكتب في أبسط صورة كلاً من $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{B}$

الحل:

$$\frac{A}{B}=\frac{9\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=9\sqrt{2}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{36\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{36\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{36\sqrt{6}}{3\times3}=4\sqrt{6}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{1}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{24}$$

.20 اكتب كلاً مما يأتي على شكل قوة أساسها عدد نسبي:

$$\left(\frac{17}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{24}{17}\right)^{-1}=\left(\frac{17\times24}{3\times17}\right)^{-1}=8^{-1}=\left(2^{3}\right)^{-1}=2^{-3}$$

$$\left(\frac{49}{13}\right)^{2}\times\left(\frac{52}{7}\right)^{2}=\left(\frac{49\times52}{13\times7}\right)^{2}=\left(7\times4\right)^{2}=28^{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{15}\times1}{3\times5}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)^{-2}=\left(\left(\sqrt{15}\right)^{-1}\right)^{-2}=\left(\sqrt{15}\right)^{2}=15$$

$$\left(\sqrt{2}a\right)^{-4}\times\left(\frac{2}{a}\right)^{-4}=\left(\frac{\sqrt{2}a\times2}{a}\right)^{-4}=\left(2\sqrt{2}\right)^{-4}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^{3}\right)^{-4}=\left(\sqrt{2}\right)^{-12}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{-6}=2^{-6}$$

ملاحظة للمدرس: استبدل التمرين 20 السابق بالتمرين 20 في كتاب الأنشطة والتدريبات عند الطالب

اختبار الوحدة الثانية والثالثة (الجبر)

أولاً : صنافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
1- قابلية القسمة على الأعداد الأولية 2، 3 ، 5	الأول 1	1. التقسيم على الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من العدد	الأول 1
2- معرفة الجذر التربيعي لعدد	الأول 3	2. إيجاد العامل المشترك الأكبر بطريقة اقليدس	الأول 2
3- معرفة القيمة المطلقة	الرابع 1	3. تبسيط الكسر بإزالة الجذر من مقام الكسر	الأول 4 والثالث
4- الجداء المساوي للصفر	الرابع 2	4. تبسيط الجذور و جمعها	الثاني
		5. جمع الكسور التي حدودها أعداد حقيقية	الثالث
		6. ايجاد حلول معادلة	الثاني

ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1- العدد الأولي من بين الأعداد الآتية هو:

$a)261 \quad , \quad b)\ 119 \quad , \quad c)503 \quad , \quad d)\ 375$

2- إذا كان $a = 1024$ ، $b = 80$ فإن ع. م . أ للعددين (a, b) هو:

$a)\ 8 \quad , \quad b)\ 16 \quad , \quad c)\ 4 \quad , \quad d)\ 32$

3- ناتج: $\sqrt{32+\sqrt{13+\sqrt{5+4}}}$ هو:

$a)\ 8 \quad , \quad b)\ 2\sqrt{6} \quad , \quad c)\ 6 \quad , \quad d)\ \sqrt{6}$

4- تبسيط $\frac{9}{3\sqrt{3}}$ هو:

$a)\ \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad b)\ \sqrt{3} \quad , \quad c)\ 3 \quad , \quad d)\ 1$

السؤال الثاني: بسط العبارة الآتية : $3\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - \sqrt{125}$

السؤال الثالث: بيِّن أنّ $2\sqrt{2}$ ناتج ما يأتي:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

السؤال الرابع: أوجد قيمة (x) في كل من المعادلتين:

1) $|x+3| = 2$
2) $(x+\sqrt{2})(x+5) = 0$

انتهت الأسئلة

سلســــــلة النِّســـــــب المُتســـــاوية

مُـــــــنظِّم الــــــدّرس

أهداف الدّرس

يتعرف على سلسلة النسب المتساوية

يستخدم خاصة النسب المتساوية في إيجاد حلول بعض المسائل

المفردات والمصطلحات الجديدة

سلسلة النسب

مُستلزمات الدّرس

كتابي الطالب والأنشطة

ســــــير الـــــــدّرس

التّمهيـــــــد

تذكّر بلال الخاصة الأساسية في النّسب وهي أنّ ضرب طرفي نسبة بعدد يعطي نسباً متساوية فيما بينها.

قام بتطبيق ذلك عدة مرات على النّسبة $\frac{3}{5}$ فضرب حدّيها بالعدد 3 ثُمّ بالعدد 7 ثُمّ بالعدد -4

فحصل على نسب متساوية من الشّكل : $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}=\frac{21}{35}=\frac{-12}{-20}$

في اليوم التّالي أخبر أصدقاءه في المدرسة عمّا تذكر، وسألوا مدرسهم عن ذلك

فأخبرهم أنّ عملية الضرب شكّلت سلسلة من النّسب المتساوية

وكان سؤالهم للمدرس عن وجود تطبيقات في الرياضيات لهذه السّلسلة من النّسب المتساوية.

أخبرهم المدرس عن وجود تطبيقات حياتية متعددة ووعدهم بشرح ذلك كلّه لهم.

التّـــــــدريس

1 – يوجه المدرس الطلاب لفتح الكتاب على النّشاط في الصفحة 76

يطلب إليهم املاء الفراغات فيه ويعطيهم فرصة زمنية لذلك



يصحح الإجابات من التلاميذ أنفسهم

2 – يقرأ لهم التعلم المدون بعد ذلك ويطلب من طلابه ربط التّعلم بالنّشاط السّابق.

حين يتأكد من فهم الجميع للتّعلم ينتقل للتّطبيق الذي يليه.

3 – يطلب منهم قراءة نص التّطبيق، يسأل أكثر من طالب / واحداً بعد واحد /، عن فهمه للنّص.

ثُمّ يطلب منهم قراءة الحل، ثُمّ يوضح الحل للطلاب، ويتأكد من فهمهم للتّطبيق.

4 – يوجه المدرس طلابه لقراءة التفكير الناقد من الكتاب، ثُمّ يطلب منهم مناقشته وفق نظام المجموعات، وينتظر إجاباتهم، ثُمّ يستمع لبعض الإجابات، يطلب من الطلاب أنفسهم تصحيح الإجابة الخطأ، ويُعزِّز الإجابة الصّحيحة.

نشاط هادف:

يطلب المدرس من طلابه قراءة النّشاط صفحة 77 من الكتاب، وتحضير الإجابة، ينتظر دقيقة ثُمّ يتلقى الإجابات المختلفة، حتى يصل إلى بضع إجابات صحيحة، ويقوّم الإجابة الخطأ إن وردت.

يقرأ عليهم التعلم بعد ذلك ويشرح فقراته، ويبين ضرورة الاستثناء فيه.



يؤكد على ما في التعلم بالتطبيقين الواردين بعده.

تمـــــــــــرّن

يطلب منهم الإجابة على الفقرة الأخيرة من الدرس / حاول أن تحل / وظيفة بيتية للدرس القادم.





الوحـــدة الرّابعـــة

النّســـبة والتّناســـب والنســـبة المئويـــة

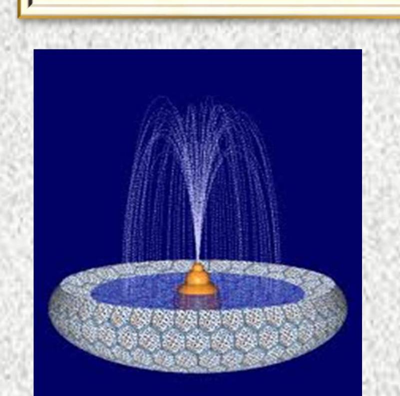
محتوى الوحدة

1. سلسلة النسب المتساوية.
2. الرّابع المتناسب.
3. التّناسب الطّردي.
4. التّناسب العكسي.
5. النسبة المئوية.
6. تطبيقات النسبة المئوية.

يُعدُّ التناسبُ مقدمةً لأبواب كثيرة من العلوم،
لما فيه من خواصَّ عمليةٍ تطبيقية
يحتاج إليها الفيزيائي في مختبره، والكيميائي في معمله،
إضافة إلى ما في دراسة الرياضيات من تطبيقات متعددة للتناسب
ومن أكثرها شيوعاً: الضرب التقاطعي، والتناسب الطردي، والتناسب العكسي
ولقد ضمّنا هذا البحثَ الكثيرَ من الأمثلة الحياتية
التي يجد فيها الدارس المتعة والفائدة.



1 - 4 النّســـــــــــــــــب والمعـــــــــــــــدّلات



سوف تتعلّم

- التمييز بين النسبة والمعدل.
- سلسلة النسب المتساوية واستخدامها في حل المسائل

أولاً: النسب والمعدلات

تذكّر

إذا كان حدا النسبة من واحدتين مختلفتين تسمى معدّل

نشـــــــاط1

ضع إشارة (✓) أمام كلّ معدل بين النّسب الآتية:

1. سرعة سيارة $75\ km/h$. ✓
2. عرض مستطيل إلى طوله .
3. أدرُسُ 7 ساعات كلّ يوم . ✓
4. رُسمَ مصور لإحدى المدن بمقياس $\frac{1}{750000}$.
5. يُنتج مشغل ألبسة 250 قميصاً في اليوم . ✓

ثانيا: سلسلة النسب المتساوية

تذكّر

تعلّمت:

أنّ كل نسبة هي كسر

وأنّ لكل كسر كسور مكافئة،

نحصل عليها بضرب بسط الكسر ومقامه بعدد

أو قسمتهما على عدد مغاير للصفر.

نشـــــــاط



املأِ الفراغَ في كلّ مما يأتي:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{20}=\frac{21}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{50}$$

$$\frac{48}{36}=\frac{\cdots\cdots}{18}=\frac{16}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{9}=\frac{8}{\cdots\cdots}$$

لاحظ أنّنا حصلنا في كلّ مرّة على سلسلة من النسب المتساوية.



الحل:

املأ الفراغ في كل مما يأتي:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{12}{20}=\frac{21}{35}=\frac{30}{50}$$

$$\frac{48}{36}=\frac{24}{18}=\frac{16}{12}=\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$$

لاحظ أنّنا حصلنا في كل مرّة على سلسلة من النسب المتساوية.

تعلّـــم

يمكن الحصول على سلسلة من النسب المتساوية
بضرب (أو قسمة) حدّي النسبة بعدد حقيقي مُغاير للصفر.

تطبيق

ثلاثة إخوة أعمارُهم متناسبة مع أطوالهم، فإذا كانت أعمارهم 17 , 16 , 14 سنة، وكان طول أصغرهم $140\ cm$ فأوجد طول كلّ من أخويه.

الحل:

إذا افترضنا أنّ عمر الأوسط x وأنّ عمر الكبير y فيكون: $\frac{17}{y}=\frac{16}{x}=\frac{14}{140}$

نجد $x=160\ cm$ و $y=170\ cm$

تفكير ناقد

هل إضافة عدد إلى حدّي نسبة ما يُعطي نسبةً مساوية للنسبة الأولى؟

الحل

إنّ إضافة عدد إلى حدّي نسبة لا يُعطي نسبة مساوية للأولى ويمكن إثبات ذلك بالمثال: $\frac{4}{5}\neq\frac{1+3}{2+3}$



في سلسلة النسب المتساوية: $\frac{15}{25}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ تحقق من أنّ النّسبة $\frac{3+6+15}{5+10+25}$ تساوي أي واحدة من النسب السابقة.

الحل

$\frac{3}{5}=\frac{24\div 8}{40\div 8}=\frac{24}{40}=\frac{3+6+15}{5+10+25}$ في تساوي أي واحدة من النسب السابقة.

تعلــــم

في سلسلة النسب المتساوية:

إنّ أيّة نسبة منها تساوي نسبة مجموع البسوط إلى مجموع المقامات

أي إذا كان: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ فإنّ: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}$ على ألاّ يكونَ المقام معدوماً.

تطبيق1

املأ الفراغاتِ الآتيةَ:

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{12\sqrt{3}}{27}=\frac{20\sqrt{3}}{45}=\frac{4\sqrt{3}+12\sqrt{3}+20\sqrt{3}}{9+27+45}=\frac{36\sqrt{3}}{81}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

تطبيق2

ABC مُثلّث قياسات زواياه تشكّل سلسلة النسب المتساوية: $\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{3}$ أوجد قياسات هذه الزوايا.

الحل:

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{3}=\frac{A+B+C}{1+2+3}=\frac{180}{6}=30^{\circ}$$

$A=30^{\circ}$

$B=60^{\circ}$

$C=90^{\circ}$

حاول أن تحلّ

إذا كان $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$، فأوجد $x\ ,\ y\ ,\ z$ علماً أنّ $3x-y+2z=671$

الحل

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{3x}{6}=\frac{-y}{-3}=\frac{2z}{8}=\frac{3x-y+2z}{6-3+8}=\frac{671}{11}=61$$

$\frac{x}{2}=61$ ومنه $x=2\times 61=122$

$\frac{y}{3}=61$ ومنه $y=3\times 61=183$

$\frac{z}{4}=61$ ومنه $z=4\times 61=244$

4 - 2 تطبيقات على التناسب



سوف تتعلّم

- الرابع المتناسب.
- التناسب الطّردي والتّناسب العكسي.

أولاً: الرّابع المتناسب



تذكّر

الخاصّة الأساسية للتناسب:

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

أي أنّ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تعني: $a \cdot d = b \cdot c$

وتدعى خاصّة الضرب التقاطعي.

- لتكن لدينا الأعداد المرتبة 18 , 12 , 9 , 6 فإنّ: $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$.
  تُسمّى الأعداد المرتبة 18 , 12 , 9 , 6 أعداداً متناسبة
  كما أنّ 18 يُسمّى بالرابع المتناسب
- بيّن أنّ الأعداد المرتبة 40 , 60 , 12 , 18 متناسبة.

الحل

تكون الأعداد 40 , 60 , 12 , 18 متناسبة إذا حققت: $\frac{40}{60} = \frac{12}{18}$

$\ell_2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, $\ell_1 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ بالتالي $\ell_1 = \ell_2$ فهي أعداد متناسبة.

تعلّم

إذا كان $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ نُسمّي الأعداد المرتبة a , b , c , d متناسبة، ويُسمّى d بالرابع المتناسب

تطبيق

أوجد الرابع المتناسب للأعداد المرتبة: 7 , 3 , 4.2

الحل:



نفترض أنّ الرابع المتناسب x ومنه $\frac{4.2}{3}=\frac{7}{x}$

نطبّق خاصة الضرب التقاطعي فنجد: $(4.2)\cdot(x)=(3)\cdot(7)$

نقسم الطرفين على 4.2 فنجد:

$\frac{4.2x}{4.2}=\frac{21}{4.2}$ ومنه $x=\frac{21}{4.2}=5$

تطبيق

وزّع محمد مبلغ 2380 على ولديه رشيد وبشير بنسبة $\frac{3}{4}$ ، أوجدْ حصّة كلّ منهما.

الحل:

$\frac{\text{حصة رشيد}}{\text{حصة بشير}}=\frac{3}{4}$ بجمع البسط إلى المقام نجد $\frac{\text{حصة رشيد}}{\text{حصة رشيد + حصة بشير}}=\frac{3}{4+3}$

استنتج أنّ حصة رشيد 1020 وحصة بشير 1360

حاول أن تحلّ

المُثلّث ABC قائم في B، أوجد قياس كلّ من الزاويتين $A\,,C$ علماً أنّ: $\frac{A}{C}=\frac{2}{7}$.

الحل:

من الفرض $\frac{A}{C}=\frac{2}{7}$ نجد $\frac{A}{C+A}=\frac{2}{7+2}$

استنتج أن قياس A .... وأن قياس C ....

1. المثلث abc قائم في B، أوجد قياس كل من الزاويتين $a\,,c$ بفرض أنّ: $\frac{A}{C}=\frac{2}{7}$.

الحل:

من الفرض $\frac{A}{C}=\frac{2}{7}$ نجد $\frac{A}{C+A}=\frac{2}{7+2}$

استنتج أن قياس A يساوي 20° وأن قياس C يساوي 70°

ثانياً: التناسب الطردي

مثال

إذا كانت أجرة عامل 400 ليرة في اليوم، فإنّ أجره في ثلاثة أيام 1200 ليرة،

وأجره في سبعة أيام 2800 ليرة، وأجره في عشرة أيام 4000 ليرة.

نُلاحظ أنّ الأجرة تتزايد مع تزايد أيام العمل. أي أنّ الأجرةَ وأيامَ العمل تتزايدان معاً

ونلاحظ: $400=\frac{4000}{10}=\frac{2800}{7}=\frac{1200}{3}=\frac{400}{1}$

نقول إنّ الأجور $4000\,,2800\,,1200\,,400$ تتناسب طرداً مع $10\,,7\,,3\,,1$ وبالترتيب ذاته

وأنّ 400 ثابت التّناسب الطردي.



تعلّـــم

تكون المقادير a, b , c متناسبة طرداً مع المقادير x , y , z المغايرة للصفر وبالترتيب ذاته إذا كانت:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

تطبيق

أسهمَ ثلاثة أخوة في شراء حاسوب محمول من مكافآت حصلوا عليها في نهاية العام الدراسي،

على أنْ تتناسب إسهاماتُهم مع الصفوف التي كانوا يدرسون فيها،

فإذا كانت قيمة الحاسوب 26000 ليرة سورية، وكان الإخوة في الصفوف (السابع والتاسع والعاشر)

فأوجد إسهامَ كلّ واحد منهم.

الحل:

نفترض أنّ x حصة الأول ونفترض أنّ y حصة الثاني ونفترض أنّ z حصة الثالث.

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{7 + 910} = \frac{26000}{26} = 1000$$

$\frac{x}{7} = 1000$ ومنه $x = 7 \times 1000 = 7000$

$\frac{y}{9} = 1000$ ومنه $y = 9 \times 1000 = 9000$

$\frac{z}{10} = 1000$ ومنه $z = 10 \times 1000 = 10000$

ثالثاً: التناسب العكسي

مثال

تقطع سيارة صغيرة المسافة بين مدينتين في 6 ساعات إذا كان معدّلُ سرعتها $60km.h^{-1}$،

بينما تقطع المسافة ذاتها في 4 ساعات إذا كان معدل سرعتها $90km.h^{-1}$،

وتقطع المسافة ذاتها في 3 ساعات إذا كان معدل سرعتها $120km.h^{-1}$.

نُلاحظ أنّ زمن الوصول يتناقص مع تزايد السرعة.

ونُلاحظ أنّ: $\frac{6}{\frac{1}{60}} = \frac{4}{\frac{1}{90}} = \frac{3}{\frac{1}{120}} = 360$

أي: $6 \times 60 = 4 \times 90 = 3 \times 120 = 360$

نقول: إنّ مجموعة الأزمنة $6 , 4 , 3$ يتناسب عكساً مع مجموعة السُّرعات $120 , 80 , 40$ وبالترتيب ذاته

وإنّ 360 هو ثابت التّناسب العكسي.



تعلـــم

تكون المقادير $a\,,b\,,c$ متناسبة عكساً مع المقادير $x\,,y\,,z$ وبالترتيب ذاته إذا كانت:

$$\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{b}{\frac{1}{y}}=\frac{c}{\frac{1}{z}}$$ أي $$a.x=b.y=c.z$$

تطبيق

يُنجز 5 عمال عملاً في عشرين يوماً، كم يوماً يلزم 4 عمال لإنجاز العمل ذاته؟ وكم يوماً يلزم 25 عاملاً لإنجازه ؟

الحل:

نفترض أنّ x عدد الأيام الذي ينجز به 4 عمال هذا العمل.

نفترض أنّ y عدد الأيام الذي ينجز به 25 عاملاً هذا العمل.

إنّ: $5\times 20=4x=25y$

$100=4x=25y$

أي أنّ: $4x=100$ فنجد x تساوي 25 يوماً، وأن: $25y=100$ فنجد y تساوي 4 أيام.

حاول أن تحلّ

تملأ حنفيتان متماثلتان حوضاً من الماء في 30 ساعة،

كم ساعةً يلزم خمس حنفيات مماثلة للحنفيتين السابقتين لملء هذا الحوض ؟

الحل:

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحنفيات قل زمن ملء الحوض

فمن أجل: $60=2\times 30$ وهو ثابت التناسب العكسي

فإنّ الزمن المطلوب هو: $12=\frac{60}{5}$ ساعة.



3 - 4 النّســـــــــــــبة المئويـــــــــــة



سوف تتعلّم

الربط بين النسبة المئوية والكسور.

تذكّر

1- الكسر العشري: كسر مقامه 10^n.
2- الكسر يعبر عن عملية قسمة.
3- $a\%(b)=a(b\%)=(ab\%)$

نشــــاط

- أعبِّر عن النّسبة المئويّة 25% بالكسر $25\%=\frac{\dots\dots}{100}=\frac{1}{\dots\dots}$.
- أعبِّر عن النّسبة المئويّة 25% بالعدد العشري $25\%=25\div100=0.25$.
- أعبِّر عن النّسبة المئويّة 225% بعدد كسري بالشّكل $225\%=\frac{225}{100}=\frac{\dots\dots}{4}=2\frac{1}{\dots\dots}$.
- أعبِّر عن النّسبة المئويّة 225% بالعدد العشري $225\%=225\div100=2.25$.
- أعبِّر عن الكسر $\frac{1.2}{240}$ بكسر عشري بالشّكل $\frac{1.2}{240}=\frac{\dots\dots}{2400}=\frac{\dots\dots}{100}$.
- أعبِّر عن الكسر $\frac{1.2}{240}$ بالنّسبة المئويّة $\frac{1.2}{240}=\frac{\dots\dots}{100}=\dots\dots\%$.

الحل:

- أعبِّر عن النسبة المئوية 25% بالكسر $25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.
- أعبِّر عن النسبة المئوية 25% بالعدد العشري $25\%=25\div100=0.25$.
- أعبِّر عن النسبة المئوية 25% بعدد كسري بالشكل $225\%=\frac{225}{100}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$.



- أُعبِّر عن النسبة المئوية 25% بالعدد العشري $225\% = 225 \div 100 = 2.25$.
- أُعبِّر عن الكسر $\frac{1.2}{240}$ بكسر عشري بالشكل $\frac{1.2}{240} = \frac{12}{2400} = \frac{0.5}{100}$.
- أُعبِّر عن الكسر $\frac{1.2}{240}$ بالنسبة المئوية $\frac{1.2}{240} = \frac{0.5}{100} = 0.005\%$.

حاول أن تحلّ

1. أوجد 36% من 450

$36\% \times 450 = 36 \times 4.5 = 162$

2. قارن $(4\%$ من $12)$ بـ $(5\%$ من $9)$.

$4 \times 12 > 5 \times 9$

$4\% \times 12 > 5\% \times 9$

$4 \times 9 = 3 \times 12$

فهما متساويان

3. قارن $(4\%$ من $9)$ بـ $(3\%$ من $12)$.

$\frac{476}{3.4} = \frac{476000}{3400} = \frac{14000}{100} = 140 = 1400\%$

4. اكتب كلاً مما يأتي نسبة مئوية $\frac{150}{400}$, $\frac{476}{3.4}$.

$\frac{150}{400} = \frac{150}{4 \times 100} = \frac{37.5}{100} = 0.375 = 37.5\%$

5. اكتب $\frac{7}{8}$ بصورة عدد عشري ثمّ نسبة مئوية.

$\frac{7}{8} = \frac{85.5}{100} = \quad 0.855 \quad = 85.5\%$

عدد عشري

6. ضع إشارة $<$ أو $>$ أو $=$ في الفراغ لتصبح العبارة صحيحة:

$2\% = 0.02$, $75\% = \frac{3}{4}$

$30\% < 30$, $4 > 40\%$

$5\% < 0.50$

$(25\%$ من $200) < (4\%$ من $120)$



تعلـــــــم

$$a\%(b+c)=a\,b\%+a\,c\%$$

تطبيق

حصلت عبير على 90% من مجموع درجات امتحاني الفصلين الأول والثاني للرياضيات (درجة كل منهما 60) ،

إذا علمت أنّ درجتها في الفصل الأول 50، فكم كانت درجتُها في امتحان الفصل الثاني ؟

الحل

مجموع الدّرجات في الامتحانين $90\%\times(60+60)=\frac{90}{100}\times 60+\frac{90}{100}\times 60=108$

درجتها في امتحان الفصل الثاني $108-50=58$

حاول أن تحلّ

إذا كانت كتلة قطعة زنك مشوب $6g$ منها $0.3g$ شوائب،

فاحسبِ النّسبةَ المئويّة للشوائب في هذه القطعة.

الحل

كل 6 غرام زنك فيها 0.3 غرام شوائب

كل 100 غرام زنك فيها x غرام شوائب

$$x=\frac{100\times 0.3}{6}=5\%$$







نشـــــاط1

إنّ 49% من 90 تُقدَّر بالمقدار 45

كما أنّ 75% من 407 تقدر بالمقدار 300

كما أنّ 150% من 610 تقدر بالمقدار 900

قدِّر بطريقة مماثلة كلاً من:

1. 25% من 198.
2. % 37 من 73.
3. 250% من العدد 32.

تذكّر

التقدير هو:

إعطاء جواب ذهني وسريع ومقبول وتزداد درجة معقوليته كلما اقترب من الحقيقية.

الحل:

لقد قدّرت 49% من 90 بـ 45 وقدّرت 75% من 407 بـ 300 وبناءً عليه:

نُقدِّر 25% من 198 بـ 50

نُقدِّر 37 % من 73 بـ 25

نشـــــاط2

1. في نهاية فصل الصيف، أعلن أحد محال بيع الألبسة عن تنزيلات على نوع من القمصان بمقدار 30%

فإذا كان سعر القميص 900 ليرة سورية

فإنّ مقدار التخفيض في السعر هو: 270 = ...×........

السِّعر الجديد للقميص 630 = 270 – 900

طريقة ثانية للحل



ويمكن حسابُ السِّعر الجديد: $900-(30\%)\times 900=630$

بحسب خاصة توزيع الضرب على الجمع والطرحُ، يُحسَبُ السِّعر الجديد على الشّكل الآتي:

$$900\times(1-0.30)=900\times\text{........}=630$$

2. في أحد المطاعم بلغَتْ فاتورةُ أحد الزبائن 4000 ليرة سورية،

فإذا أضيف إليها 10% من قيمتها أجرة خدمة الزبون عندئذٍ:

مقدار الإضافة هو: $4000\times\text{........}=400$

ويكون إجماليَّ الفاتورة هو ....

طريقة ثانية: $4000\times(1+\text{........})=4000\times(1.1)=\text{........}$

الحل:

1. في نهاية فصل الصيف، أعلن أحد محال بيع الألبسة تنزيلات على نوع من القمصان بمقدار 30% فإذا كان سعر القميص 900 ليرة سورية فإنّ مقدار التخفيض في السعر هو:

$$30\%\times 900=270$$

السعر الجديد للقميص هو $900-270=630$

ويمكن حساب السعر الجديد وبخطوة واحدة: $900-(30\%)\times 900=630$

وبحسب خاصة توزيع الضرب على الجمع والطرح يحسب السعر الجديد بالشكل الآتي:

$$900\times(1-0.30)=900\times 0.70=630$$

2. في أحد المطاعم بلغت فاتورة أحد الزبائن 4000 ليرة سورية، فإذا أضيف إليها 10% من قيمتها أجرة خدمة الزبون عندئذٍ:

مقدار الإضافة هو: $4000\times\frac{10}{100}=400$

ويصبح إجمالي الفاتورة هو 4400

وبخطوة واحدة يصبح إجمالي الفاتورة: $4000\times(1+0.1)=4000\times 1.1=4400$

تعلّم

- إنّ زيادة المقدار a بنسبة مئوية $b\%$ منه يجعل المقدار الكلي هو: $a(1+b\%)$.
- إنّ نقصان المقدار a بنسبة مئوية $b\%$ منه يجعل المقدار الكلي هو: $a(1-b\%)$.



تطبيق

اقترضَ أحمد من المصرف 64000 ليرة سورية بفائدة سنوية مقدارها 9%،

كم سيدفع للمصرف في نهاية سنة من تاريخ تسلُّمهِ القرضَ ؟

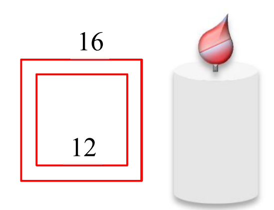
الحل:

ما يدفعه للمصرف في نهاية السنة هو:

$$64000(1+0.09) = 64000 \times 1.09 = 69960$$

تأثر المحيط والمساحة الكلية والحجم بتغيّر الأبعاد بشكل تناسبي

نشـــــاط1



رقاقة من شمع البرافين مربّعة الشّكل طول ضلعها $16\ cm$، تعرّضَتْ للحرارة من جميع جوانبها فأصبح طول ضلعها $12\ cm$ بعد 8 ثوان من بدء التسخين.

إنّ مقدار التناقص في طول الضلع هو: $4\ cm$

فتكون النّسبة المئويّة لتناقص طول الضلع هي: 25%

إنّ معدّل التناقص في طول الضلع هو: $\frac{1}{2}\ cm.s^{-1}$

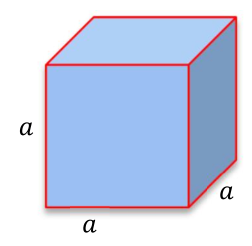
أجب عن الأسئلة الآتية:

ما مقدارُ تناقص المحيط ؟ $64-48=16$

ما النّسبة المئويّة لتناقص المحيط ؟ $\frac{16}{64}=25\%$

ما معدّل التناقص في المحيط ؟ $\frac{16}{8}=2\ cm.s^{-1}$

نشـــــاط2



مكعّبٌ من الصابون طولُ ضلعه a وبعد 7 أيام من استخدامه المنتظم أصبح طول ضلعه $\frac{1}{2}a$ فيكون لدينا ما يأتي:

مقدار التناقص في طول الضلع: $a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a$

النّسبة المئويّة لتناقص طول الضلع هي: $\frac{\frac{1}{2}a}{a}=\frac{1}{2}=\frac{50}{100}=50\%$

مقدار التناقص في المساحة الكليّة هو: $6a^2 - 6\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 6a^2 - \frac{3}{2}a^2 = \frac{9}{2}a^2$

النّسبة المئويّة لتناقص المساحة الكلية: $\frac{\frac{9}{2}a^2}{6a^2} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$

مقدار التناقص في الحجم هو: $\frac{7}{8}a^3$

أجب عن الأسئلة الآتية:

ما النّسبة المئويّة لتناقص الحجم ؟ $\frac{\frac{7}{8}a^3}{a^3} = \frac{7}{8} = \frac{85.5}{100} = 85.5\%$

ما معدّل التناقص في الحجم يومياً ؟ $\frac{\frac{7}{8}a^3}{7} = \frac{1}{8}a^3$

كم يوماً يلزم لتذوبَ القطعةُ بكاملها ؟





1. لتحضير قطعة من الحلوى يلزمنا $250g$ من السكر لكل $400g$ من الطحين،
أوجد كميّةَ السّكر اللازمة لصنع قالب حلوى فيه $600g$ من الطحين.

الحل:

نُشكل التناسب الموافق: $\frac{600}{\text{كمية السكر}} = \frac{400}{250}$

استنتج باستخدام الضرب التقاطعي أنّ $250 \times 600 = \text{كمية السكر} \times 400$

وبتقسيم الطرفين على 400 نجد أنّ كمية السكر اللازمة هي: 375 غرام.

2. قطعة أرض مستطيلةُ الشّكل مساحتها $3600m^2$، املأ الجدول الآتي لحساب أحد بعدي قطعة الأرض عند معرفة البعد الآخر.

البعد الأوّل	40	60	……	100	……	50
البعد الثّاني	90	……	120	……	180	……

لاحظ وجود تناسب عكسي بين البعدين.

الحل:

قطعة أرض مساحتها $3600m^2$، املأ الجدول الآتي لحساب أحد بعدي قطعة الأرض عند معرفة البعد الآخر.

البعد الأوّل	40	60	30	100	20	50
البعد الثّاني	90	60	120	36	180	72

3. أوجدِ الرابعَ المتناسب للأعداد: $3 , 9\sqrt{3} , 5$.

الحل:

$$\frac{3}{9\sqrt{3}} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{9\sqrt{3} \times 5}{3} = 15\sqrt{3}$$

4. أوجد عددين موجبين فرقُهما 12 ونسبتهما $\frac{8}{5}$.



الحل:

$$\frac{a}{b}=\frac{8}{5}$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{8-5}{5}$$

$$\frac{12}{b}=\frac{3}{5}$$

$$b=\frac{12\times 5}{3}=20$$

$$a=32$$

5. إذا كان مجموع عمري طالبين 30 سنة ونسبة عمريهما $\frac{2}{3}$، فأوجد عمر كلّ منهما.

الحل:

نفرض عمر بشير x وعمر حمزة y

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{x+y}{y}=\frac{1+5}{5}$$

$\frac{30}{y}=\frac{6}{5}$ ومنه $y=25$ وبالتالي $x=5$

6. أوجد قياساتِ زوايا مُثلّث ABC إذا كانت قياساتها تتناسب عكساً مع الأعداد $2,3,6$.

الحل

$$\frac{A}{\frac{1}{2}}=\frac{K}{\frac{1}{3}}=\frac{C}{\frac{1}{6}}=\frac{A+K+C}{\frac{3}{6}+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}=\frac{180}{\frac{6}{6}}=180$$

$$A=90^\circ\ ,K=60^\circ\ ,C=30^\circ$$

7. في معرض لبيع السيارات انخفض سعر السيارة في عام واحد من 800000 ليرة سورية إلى 600000 ليرة سورية. ما نسبة انخفاض سعر السيارة؟

الحل

مقدار التخفيض في سعر السيارة هو: $8000000-600000=200000$

كل 800000 تحقق تخفيضاً قدره 200000

كل 100 تحقق تخفيضاً قدره x

$$x = \frac{100 \times 200000}{800000} = \frac{100}{4} = 25\%$$

8. في صالة بيع تمّ تخفيضُ ثمن المعطف من 4000 ليرة سورية إلى 3200 ليرة سورية، وتخفيضُ ثمن زوج الأحذية من 1000 ليرة سورية إلى 750 ليرة سورية

أ. أيُّ السلعتين كان مقدار التخفيض في سعرها أكبر ؟

ب. أيُّ السلعتين كانت نسبةُ التخفيض في سعرها أعلى ؟

الحل

أ. مقدار التخفيض في سعر المعطف: $4000 - 3200 = 800$

نسبة التخفيض في سعر المعطف: $x = \frac{100 \times 800}{4000} = 20\%$

ب. مقدار التخفيض في سعر زوج الأحذية: $1000 - 750 = 250$

نسبة التخفيض في سعر زوج الأحذية: $y = \frac{100 \times 250}{1000} = 25\%$

نلاحظ أنّ نسبة التخفيض في سعر زوج الأحذية أكبر من نسبة التخفيض في سعر المعطف

9. اشترى تاجر 50 لعبة بمبلغ 8000 ليرة سورية واكتشف فيما بعدُ أنّ 5 لعب منها تالفة فإذا باع كلّ لعبة من اللعب المتبقية بسعر 200 ليرة سورية

فما مقدار ربح التاجر ؟ وما نسبة ربحه ؟

الحل:

نفرض مساحة الأول x ونفرض مساحة الثاني y ونفرض مساحة الثالث z

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10}$$

$$\frac{x + y + z}{26} = \frac{2600}{20} = 100$$

$$x = 700 \ s.p$$

$$y = 900 \ s.p$$

$$z = 1000 \ s.p$$



الوحـــــدة الرّابعـــــة

النّسبة والتّناسب والنّسبة المئويّة

1. أوجد الرّابع المتناسب مع كل مجموعة ممّا يأتي:

$a)\ 7.2\ ,12\ ,5.3 \qquad b)\ 8.5\ ,13\ ,20.5 \qquad c)\ 12\ ,7.2\ ,3$

الحل

نفترض أنّ الرابع المتناسب في كل منها x

$a)\ 7.2\ ,12\ ,5.3$

$\frac{7.2}{12} = \frac{5.3}{x}$ بتطبيق خاصّة الضرب التّقاطعي نجد:

$$7.2x = 62.4$$

$$x = \frac{62.4}{7.2} = \frac{26}{3}$$

$b)\ 8.5\ ,13\ ,20.5$

$\frac{8.5}{13} = \frac{20.5}{x}$ بتطبيق خاصّة الضرب التّقاطعي نجد:

$$8.5x = 266.5$$

$$x = \frac{266.5}{8.5} = \frac{533}{17}$$

$c)\ 12\ ,7.2\ ,3$

$\frac{12}{7.5} = \frac{3}{x}$ بتطبيق خاصّة الضرب التّقاطعي نجد:

$$12x = 22.5$$

$$x = \frac{22.5}{12} = \frac{7.5}{4}$$

2. أوجد عددين موجبين فرقهما 28 ونسبتهما $\frac{12}{5}$.

الحل

نفترض العدد الكبير A والعدد الصغير B فيكون: $\frac{A}{B} = \frac{12}{5}$ نطرح المقام من البسط نجد:

$\frac{12-5}{5} = \frac{A-B}{B}$ نعوّض $\frac{7}{5} = \frac{28}{B}$ ومنه $B = \frac{28\times5}{7} = 20$

3. المثلث ABC فيه $A = 70^0$، و $\frac{B}{C} = \frac{4}{7}$،

أوجد قياس كلّ من B , C ، واستنتج نوع المثلث.

الحل

$A + B + C = 180^\circ$ ومنه $B + C = 110^\circ$ ولدينا $\frac{B}{C} = \frac{4}{7}$ ، نجمع البسط إلى المقام $\frac{B+C}{C} = \frac{4+7}{7}$

نعوّض فنجد: $\frac{11}{7} = \frac{110}{C}$ نطبق خاصة الضرب التقاطعي فنجد: $11\ C = 770$ ومنه $C = 70^\circ$ و $B = 40^\circ$

في المثلث $A = C = 70^\circ$ فهو متساوي الساقين.

4. أوجد قياسات زوايا مثلث ABC إذا كانت متناسبة طرداً مع الأعداد $2 , 3 , 5$.

الحل

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{180}{10} = 18$$

$\frac{A}{2} = 18$ ومنه $A = 36^\circ$

$\frac{B}{3} = 18$ ومنه $B = 54^\circ$

$\frac{C}{5} = 18$ ومنه $C = 90^\circ$

5. اشترك ثلاثة عمال في نقل 2250 بلاطة لمبنى قيد الإنشاء، فإذا علمت أنّ مساهماتهم تتناسب طرداً مع أعمارهم، وهي $27 , 25 , 23$ / سنة، وأنّ صاحب العمل يعطي ليرة سورية أجرة نقل كلّ بلاطة، فاحسب نصيب كلّ واحد منهم من الأجر.

الحل

نفترض نصيب الأوّل x ونصيب الثّاني y ونصيب الثّالث z.

$$\frac{x}{23} = \frac{y}{25} = \frac{z}{27} = \frac{x+y+z}{23+25+27} = \frac{2250}{75} = 30$$

$x = 30 \times 23 = 690$ بلاطة فيكون نصيبه من الأجر 690 ليرة سورية.

$y = 30 \times 25 = 750$ بلاطة فيكون نصيبه من الأجر 750 ليرة سورية.

$z = 30 \times 27 = 710$ بلاطة فيكون نصيبه من الأجر 710 ليرة سورية.

6. تُتِمُّ آلة لعجن الطّحين في فرن آلي عجن 3600 كيلو غرام من الطحين خلال ثمانية عشرة ساعة.
بكم ساعة يَتِمُّ عجن الكمية ذاتها بآلتين للعجن من ذات النوع،
وبكم ساعة يتم إنجاز العمل بثلاث آلات للعجن من النوع ذاته.

الحل

نفترض زمن إنجاز آلتين معاً للعمل x وزمن إنجاز ثلاث آلات معاً للعمل y .
أي أنّ: عدد الآلات يتناسب عكساً مع الزمن، وبالتالي:
$\frac{1}{\frac{1}{18}} = \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{y}}$ ومنه نجد $1 \times 18 = 2 \times x = 3 \times y$
$x = \frac{18}{2} = 9$ ساعات
$y = \frac{18}{3} = 6$ ساعات

7. حقّق تاجر ربحاً قدره 1260 ليرة سورية في بيع 100 كيلوغرام من مادة السّماد الكيميائي،
فإذا كانت نسبة ربحه 15%،
احسب المبلغ الذي دفعه التّاجر لشراء الكيلوغرام الواحد من هذا السّماد.

الحل

نسبة ربح التاجر إلى المبلغ المدفوع يساوي نسبة 15 إلى 100

$\frac{126\ 0}{x} = \frac{15}{100}$ ومنه $x = \frac{126\ 0 \times 100}{15} = 8400\ s.p$ وهو ثمن شراء كمية 100 كيلوغرام.
ثمن شراء 1 كيلوغرام $\frac{8400}{100} = 84\ s.p$



اختبار الوحدة الرابعة (الجبر)

أولاً : صنافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
يتعرف النسبة والتناسب	1	يوجد التناسب	$1+2+3$
يتعرَّف النسبة المئوي	$1+3$	يوظف التناسب	$1+2+3$
		يوجد النسبة المئوية	$1+3$
		يحل معادلة	$1+2$

ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول: دُلَ على الإجابة الصّحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

1. إذا كان $\frac{\sqrt{7}+1}{3}=\frac{x}{\sqrt{7}-1}$ فإنَّ x تساوي :

2	3	6	7

2. إنَّ 34% من 450 تساوي:

134	143	135	153

3. إذا كان العددان x, y متناسبان عكساً مع العددين $1,2$ وفق هذا الترتيب فإنَّ:

$x+y=3$	$y=2x$	$x=2y$	$x=y$

4. إذا كان $\frac{x-y}{x}=\frac{x+y}{x}$ فإنَّ:

$x=2, y\neq 0$	$x\neq 0, y=0$	$x=0, y=0$	$x=2, y=2$

السؤال الثاني: حل التدريبين الآتيتين:

1. أوجد عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$.
2. يزيد عمر طارق على عمر ماهر بمقدار أربع سنوات فإذا كانت نسبة عمريهما $\frac{3}{5}$ أوجد عمر كل منهما.

السؤال الثالث: حلّ المسألة الآتية:

بمناسبة نهاية الموسم، تم تخفيض سعر الحقيبة المدرسية من 500 ليرة سورية إلى 350 ليرة سورية، وتمّ تخفيض ثمن الدفتر من 80 ليرة سورية إلى 65 ليرة سورية. والمطلوب:

احسب نسبة التخفيض في كلّ من السّلعتين، ثُمّ وازن بين النّتيجتين.

انتهت الأسئلة

لغـــــــــــــة الجـــــــــــــبر

مُـــــــــنظِّم الـــــــــدّرس

أهداف الدّرس

ضرب التعابير الجبرية.

مُفردات جديدة

كثير الحدود.

مُستلزمات الدّرس

السّبورة. كتابي الطالب والأنشطة.

ســــــــــير الــــــــــدّرس

التّمهيـــــــــــــد

اسأل الطلاب

ما مساحة المستطيل الذي بعديه x, y ؟ الجواب xy.

ما مساحة المُربّع الذي طول ضلعه x ؟ الجواب x^2 .

ما محيط المُربّع الذي طول ضلعه x ؟ الجواب $4x$.

ماذا سميتم كلاً من: $xy, x^2, 4x$ ؟ الجواب: حدّ جبري.

اطلب من الطّلاب قراءة التمهيد من الكتاب

كلِّف المجموعات ملء فراغات النّشاط الأول صفحة 88

كلِّف الطّلاب تنفيذ (حاول أن تحل)



التّـــــــــــــدريس

وضح النّشاط الوارد في الصّفحة 89 وكلِّف المجموعات بملء فراغاته

اكتب على السّبورة $x(x+3)=x^2+3x$ واسأل الطلاب هل تحققوا من هذه المساواة ؟

سمِّ x^2+3x كثير حدود وإنَّ x^2+3x منشور $x(x+3)$

اطلب من الطّلاب ملء فراغات النّشاط ②

كلِّف الطّلاب تنفيذ حاول أن تحل

الخاتمـــة والتّقيـــيم

تحقق من فهمك: كيف نعبر عن جداء التّعبيرين الجبريين: $x-1,\ 2x+1$

تمـــــــــــــرّن

الواجب المنزلي:

1. حل المعادلة $\frac{x+2}{2}=\frac{3}{2x}$: $x \neq 0$.
2. **تمارين** من كتابي الطّالب والأنشطة.



الوحـــدة الخامســـة

لغـــــــة الجـــــــبر

محتوى الوحدة

1. التعابير الجبريّة.
2. تحليل كثير الحدود.
3. المعادلات والمتراجحات.

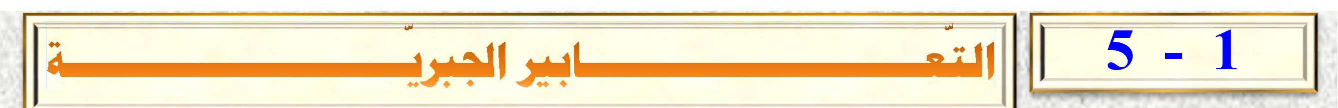
لغةُ الجبر لغةٌ عالميّةٌ، إذ تعتمدُ على الرُّموز والتّعابير الجبريّة

وفيها نتعرّف التّراكيبَ الجبريّة وما يتمّ عليها من جمع وضرب وقسمة وتحليل،

وهي مدخلٌ مناسب للتّعرُّف بالمعادلات الجبرية

كلّ ذلك بشكلٍ مُبسّط مع الكثير من الأمثلة المشوّقة والأنشطة والتطبيقات.





5 - 1 التّعـــابير الجبريّـــة

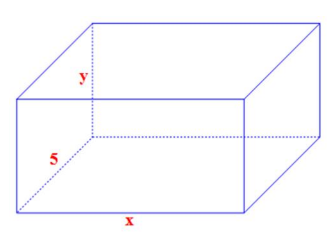


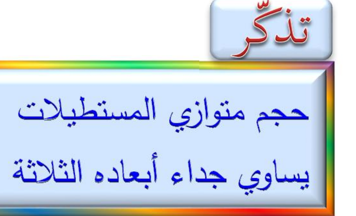
سوف تتعلّم

- ضرب التعابير الجبرية وقسمتها .
- المتطابقات التربيعيّة .

تمهيد

تأمّلِ الشّكل المجاور:





إنّ حجم متوازي المستطيلات هو $5xy$

نُسمّي التعبير الجبري $5xy$ حدّاً جبرياً

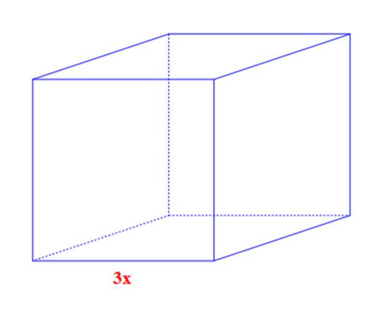
ونُسمّي 5 المعامل العددي لهذا الحدّ الجبري

و $x\ y$ القسم الحرفي لهذا الحدّ.



نشـــاط

تأمّل المكعّبَ المجاور:



حجم المكعب بدلالة x في أبسط صورة

$(3x)^3 = 27x^3$

نُسمّي: $27x^3$ بـ الحدّ الجبري.

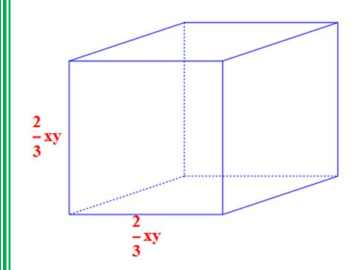
: 27 بـ المُعامِلُ العددي.

: x^3 بـ القسم الحرفي.

حاول أن تحلّ

عبّر عن حجم المكعّب الذي طول ضلعه $\frac{2}{3}xy$ المرسوم جانباً بدلالة $x\ ,y$

ثُمَّ دُلَّ على المعامل العددي والقسم الحرفي(الرمزي).



الحل

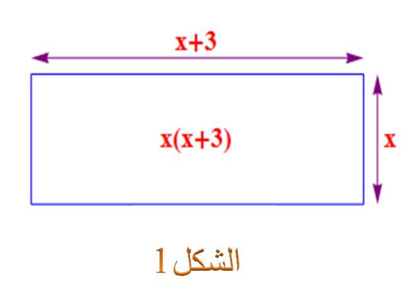
حجم المكعّب هو: $\left(\frac{2}{3}\,x\,y\right)^3 = \frac{8}{27} \times x^3 \times y^3$

المُعامِلُ العدديُّ: $\frac{8}{27}$

القسم الحرفي: $x^3 \times y^3$

أولاً: الضّـــــــــــرب

نشـــــاط1

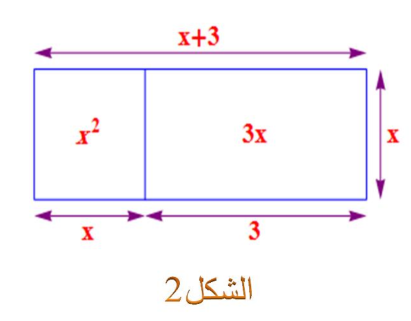


الشكل1

حديقة مستطيلة الشّكل بعداها $x\,, x+3$

فما مساحتها بدلالة x ؟ $x(x+3)$

نقسم الحديقة إلى منطقتين كما في الشّكل2:



الشكل2

إحداهما مربعة، ما مساحتها ؟ x^2

والأخرى مستطيلة الشّكل، ما مساحتها ؟ $3x$

فيكون مجموع مساحتي المنطقتين يساوي $x^2 + 3x$

إذن: يمكننُا أنّ نكتب: $x(x+3) = x^2 + 3x$

نُسمِّي: $x^2 + 3x$ منشورَ $x(x+3)$ وكلاً من $x^2, 3x$ حدّاً جبريّاً

ونُسمِّي: $x^2 + 3x$ كثير حدود.

ونحصل على النتيجة ذاتها باستخدام خاصة توزيع الضّرب على الجمع

$$x(x+3) = x \cdot x + x \cdot 3$$
$$= x^2 + 3x$$

الحل:

نشـــــاط2

أوجد منشور A حيث: $A = 4x(2x+5)$

الحل:

$$A = 4x(2x+5) = 4x \times 2x + 4x \times 5$$
$$= 8x^2 + 20x$$

حاول أن تحلّ

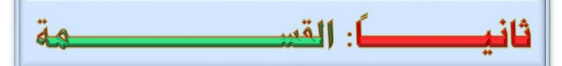
أوجد منشور كلّ من العبارات الآتية بأبسط صورة:



① $A = 2x\left(3x+2\right) \qquad = 6x^{2}+4x$

② $C = 4y\left(y^{2}+3y-1\right) \qquad = 4y^{3}+12y^{2}-4y$

③ $E = x\left(y+2\right)+y\left(3+2x\right) = \left(x\ y+2x\right)+\left(3y+2x\ y\right) = 2x+3y+3x\ y$



ثانيــــــــاً: القســـــــــــمة

مثال

لاحظ عملياتِ التبسيط الآتية:

> معلومة
>
> المقام لا يساوي الصفر أينما وجد

① $\dfrac{6x^{3}}{3x} = \dfrac{6}{3}\times\dfrac{x^{3}}{x} = 2\times x^{2} = 2x^{2}$

② $\dfrac{6x^{2}}{2x^{5}} = \dfrac{6}{2}\times\dfrac{x^{2}}{x^{5}} = 3\times\dfrac{1}{x^{3}} = \dfrac{3}{x^{3}}$

③ $\dfrac{-36y^{2}}{4y} = -9\times y \quad = -9y$

④ $\dfrac{9x^{2}y^{2}}{4x} = \dfrac{9}{4}\times x\times y^{2} = \dfrac{9x\ y^{2}}{4}$

⑤ $\dfrac{8x^{3}y}{6x^{2}y^{5}} = \dfrac{4}{3}\times x\times\dfrac{1}{y^{4}} = \dfrac{4x}{3y^{4}}$

تعلــــم

> لقسمة حّد جبري على آخرَ مغايرٍ للصفر
>
> نقسم المعامل العدديّ على المعامل العددي
>
> ونقسم القسم الحرفي على القسم الحرفي

تطبيق

بسِّط كلاً ممّا يأتي:

① $A = \dfrac{9y^{2}}{3y} = 3y$, ② $B = \dfrac{54x^{5}}{6x} = 9x^{4}$

③ $C = \dfrac{5a^{3}}{25a^{4}} = \dfrac{1}{5a}$, ④ $D = \dfrac{x^{3}}{2yx^{6}} = \dfrac{1}{2y\ x^{3}}$

⑤ $E=\frac{18y^5}{xy^5}=\frac{18}{x}$, ⑥ $F=\frac{3yx^2}{12y^4}=\frac{x^2}{4y^3}$

مثال

1. أوجد ناتج $\frac{2x^2-8x+6x^3}{2x}$ بأبسط صورة:

الحل:

$$\frac{2x^2}{2x}-\frac{8x}{2x}+\frac{6x^3}{2x}=x-4+3x^2$$

2. أكمل ما يأتي:

$$\frac{15x^2y+10xy^2+25xy}{5x}=\frac{15x^2y}{5x}+\frac{10xy^2}{5x}+\frac{25xy}{5x}$$
$$=3xy+2y^2+5y$$

حاول أن تحلّ

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

① $\frac{5y^2+3y-10}{15}=\frac{5y^2}{15}+\frac{3y}{15}-\frac{10}{15}=\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{5}y-\frac{2}{3}$

② $\frac{21x^2y+14xy^2+7x^2y^2}{7xy}=3x+2y+xy$

ثالثـــاً: المتطابقـــات التربيعيـــة

تذكّر

كلّ معادلة يجب أن تُرفق بمجموعة
تُسمّى مجموعة التعويض
وحلّ المعادلة محتوى في هذه المجموعة.

أ: المتطابقة

ضع إشارة ✓ أمام المعادلة التي مجموعة حلولها $\mathbb{R}$ في كلّ من المعادلات الآتية:

① $x+1=3$

② $3(x+1)=3x+3$ ✓

③ $x^2=4$

④ $\sqrt{x^2}=|x|$

نُسمِّي المعادلة التي مجموعة حلولها $\mathbb{R}$ متطابقة.



حاول أن تحلّ

ضع إشارة ✓ أمام كلّ متطابقة في $\mathbb{R}$ ممّا يأتي:

① $x^2+1=(x+1)^2$

② $0x=0$ ✓

③ $x^2=5x-6$

④ $x(x-1)=x^2-x$ ✓

الحل

① صحيحة فقط من أجل $x=0$ فهي ليست متطابقة.

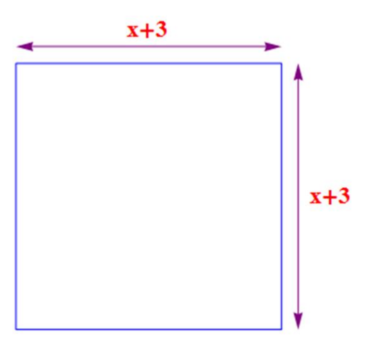
② صحيحة دوما أيّا كان x من $\mathbb{R}$ فهي متطابقة.

③ صحيحة فقط من أجل $x=3$, $x=2$ فهي ليست متطابقة.

④ صحيحة دوما أيّا كان x من $\mathbb{R}$ فهي متطابقة.

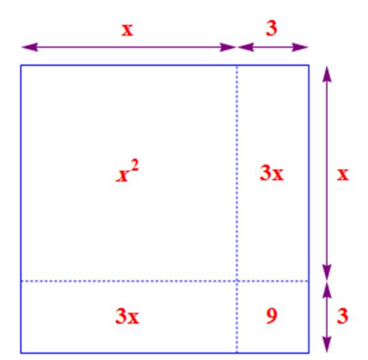
ب: المتطابقة التربيعية

مثال



1. منطقة مربعة الشّكل طول ضلعها $(x+3)$ ومساحتها $(x+3)^2$

- يمكن تقسيمُ هذه المنطقة إلى أربع مناطقَ كما في الشّكل المجاور:
- تأمّل الشّكلين واستنتج أنّ: $(x+3)(x+3)=x^2+6x+9$



2. ونحصل على النتيجة ذاتها باستخدام خاصة توزيع الضّرب على الجمع:

$$(x+3)(x+3)=x(x+3)+3(x+3)$$

$$=x^2+3x+3x+9$$

$$=x^2+6x+9$$

3. ومن أجل العددين الحقيقيين a , b فإنّ:

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a(a+b)+b(a+b)\\&=a^2+ab+ba+b^2\\&=a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$



تعلـــم

أياً كان العددان الحقيقيان a, b فإنّ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ وهي متطابقة تربيعية

وتُقرأ: مربّعُ مجموع عددين يساوي مربع الأول + ضعفي الأول في الثاني + مربع الثاني

ندعو الطرف الأيمن منشوراً للطرف الأيسر.

وندعو الطرف الأيسر تحليلاً للطرف الأيمن.

تطبيق

انشر كلاً من:

① $(x+5)^2 \quad = x^2 + 10x + 25$

② $(2x+3y)^2 \quad = 4x^2 + 12xy + 9y^2$



أكملِ الفراغاتِ فيما يأتي:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$



أياً كان العددان الحقيقيان a, b فإنّ: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ وهي متطابقة تربيعية شهيرة. **وتُقرأ:**

مربع فرق عددين يساوي مربع الأول – ضعفي الأول في الثاني + مربع الثاني

تطبيق

انشر كلاً من: $(x-7)^2 \quad , \quad (2a-3)^2$

الحل

$(2a-3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$

$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$



نشـــــاط

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2-ab+ab+b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

تعلـــم

أياً كان العددان الحقيقيّان a, b فإنّ: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ وهي متطابقة تربيعية شهيرة.

تطبيق1

انشر كلاً من:

① $(x-5)(x+5)$ ② $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$ ③ $(2x-3)(2x+3)$

الحل

① $(x-5)(x+5)=x^2-25$

② $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})=a^2-3$

③ $(2x-3)(2x+3)=4x^2-9$

تطبيق2

أزلِ الجذرَ من مقام $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

الحل:

نُسمّي $\sqrt{5}-1$ مرافق $\sqrt{5}+1$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

حاول أن تحلّ

1. انشر كلاً ممّا يأتي ثُمَّ اكتب الناتج بأبسط صورة:



① $(2a-b)^2 \quad = 4x^2 - 4ab + b^2$

② $\left(\frac{1}{2}z - 2y\right)^2 \quad = \frac{1}{4}z^2 - 2zy + 4y^2$

③ $2b(b+1)^2 \quad = 2b\left(b^2 + 2b + 1\right) = 2b^3 + 4b^2 + 2b$

④ $(x+2)^2 + (x-2) \quad = x^2 + 4x + 4 + x - 2 = x^2 + 5x + 2$

⑤ $3(x-1)^2 + (x+1)(x-1) = (x-1)\left[3(x-1) + (x+1)\right] = (x-1)\times(3x - 3 + x + 1)$
$= (x-1)\times(4x-2) = (x-1)(2)(2x-1) = 2(x-1)(2x-1)$

⑥ $(x-4)(4+x) \quad = (x-4)(x+4) = x^2 - 16$

⑦ $(-3y-5)(-3y+5) \quad = 9y^2 - 25$

2. أزل الجذر من المقام $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

الحل

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-\sqrt{6}}{3-2} = 3-\sqrt{6}$$





5 - 2 تحليـــــــل كثـــــــيرات الحــــــــدود



سوف تتعلّم

- التحليل بإخراج العامل المشترك الأعلى.
- التحليل بالتجميع.
- التحليل باستخدام المتطابقات التربيعية.
- التحليل بالطريقة المباشرة.

تذكّر

التحليل: تحويل المجموع إلى جداء.
النشر: تحويل الجداء إلى مجموع.

أولاً: التحليل بإخراج العامل المشترك الأعلى

مثال 1

ليكن لدينا الحدّان: $18x^5 , 30x^3y$

إنّ الحدّ الأوّل يُكتب: $18x^5 = \boxed{6x^3} \times 3x^2$

أيضاً الحدّ الثّاني يُكتب: $30x^3y = \boxed{6x^3} \times 5y$

نُسمّي $6x^3$ العاملَ المشترك الأعلى للحدين $18x^5 , 30x^3y$

لاحظ أنّ 6 العامل المشترك الأكبر للمعاملين 18 ، 30

x^3 قوة المتغيّر المشترك بأصغر أسّ مشترك.

مثال 2

لتكن لدينا الحدود: $27x^2y^2z^2 , 36xy^2z^2 , 63x^3y^3z^2$

إنّ العامل المشترك الأعلى لهذه الحدود $9xy^2z^2$

تعلّم

العامل المشترك الأعلى لعدّة حدود جبرية هو حاصل ضرب العامل المشترك الأكبر للمعاملات العددية في قوى المتغيرات المشتركة بأصغر أسّ مشترك.



تطبيق

أوجدِ العاملَ المشترك الأعلى لكلّ من الحدود الآتية: $20xy^2$, $10xyz$, $15x^2y$.

الحل

العامل المشترك الأعلى لهذه الحدود هو $5x\ y$.

مثال

حلِّل كثيرَ الحدود $5x^2+10x$.

الحل

العامل المشترك الأعلى للحدّين: $5x^2$, $10x$ هو $5x$.

نطبّق خاصة توزيع الضّرب على الجمع ونكمل:

$$5x^2+10x = 5x\times x+5x\times 2$$
$$= 5x(x+2)$$

نُسمِّي $5x(x+2)$ تحليل كثير الحدود $5x^2+10x$.

ونُسمِّي كلاً من $5x$, $(x+2)$ عاملاً من عوامل كثير الحدود.

نشـــــاط

حلِّل كثير الحدود $16x^2y+8x^3-40x^2$.

ما العامل المشترك الأعلى للحدود: $40x^2$, $8x^3$, $16x^2y$ ؟

إذن: نكتب

$$16x^2y+8x^3-40x^2 =$$
$$= 8x^2\times 2y+8x^2\times x-8x^2\times 5$$
$$= 8x^2(2y+x-5)$$

حاول أن تحلّ

1. حلِّل بإخراج العامل المشترك الأعلى في كلّ ممّا يأتي:

① $4x+12y = 4(4+3y)$

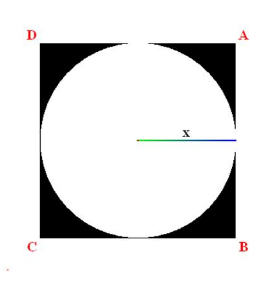
② $7x^2-14x = 7x(x-2)$

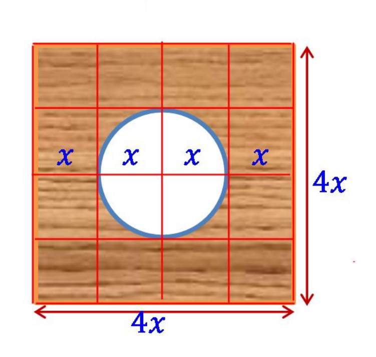
③ $5xy^2+10x^2y^2 = 5x\ y^2(1+2x)$

④ $3x^2y+6xy^2-9x^2y^2 = 3x\ y\ (x+2y-3x\ y)$

⑤ $(x+1)(x^2)+5(x+1) = (x+1)(x^2+5)$

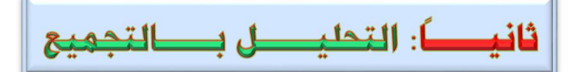
2. عبِّر عن مساحة المنطقة الملونة في كلّ من الشّكلين الآتيين بدلالة x ثمّ حلِّل الناتج:





$$(2x)^2 - \pi x^2 = 4x^2 - \pi x^2$$
$$= x^2(4-\pi)$$

$$(4x)^2 - \pi x^2 = 16x^2 - \pi x^2$$
$$= x^2(16-\pi)$$



ثانيــــاً: التحليـــــل بـــــالتجميع



نشـــــاط1

حلِّل كثير الحدود $ax+by+ay+bx$ (نلاحظ عدم وجود عامل مشترك بين جميع الحدود)

نكتب:

$$ax+bx+ay+by = (ax+bx)+(ay+by)$$
$$= x(a+b)+y(a+b)$$
$$= (a+b)(x+y)$$

نُسمِّي هذا التحليل: التحليل بالتجميع.

حاول أن تحلّ

حلِّل كثيراتِ الحدود الآتية:

① $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1)$

② $x^3 - x^2 + 1 - x = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1)$

$= (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

③ $x^2 + 6x + 8 \quad = x^2 + 2x + 4x + 4 = x(x+2)+4(x+2) = (x+2)(x+4)$

(توجيه: $6x = 2x + 4x$)



ثالثـــاً: التحليـــل باســـتخدام المتطابقـــات التربيعيـــة

مثال

حلّل كلاً ممّا يأتي:

① $x^2-9=x^2-(3)^2=(x+3)(x-3)$

② $y^2+8y+16=y^2+2(y)(4)+(4)^2=(y+4)^2$

③ $x^2-2x+1=x^2-2(x)(1)+(1)^2=(x-1)^2$

حاول أن تحلّ

حلِّل كثيراتِ الحدود الآتية إلى أكبر عدد ممكن من الحدود:

① $x^2-\frac{1}{4} \quad =\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

② $4-a^2 \quad =(2-a)(2+a)$

③ $x^4-16 \quad =(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

④ $x^2-3 \quad =(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

⑤ $x^2+6x+9 \quad =(x+3)^2$

⑥ $x^3-x \quad =x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

⑦ $(x+1)x^2-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x-1)(x+1)=(x+1)^2(x-1)$

⑧ $2x^3-12x^2+18x \quad =2x(x^2-6x+9)=2x(x-3)^2$

توجيه: حلّل كثير الحدود: تعني التحليلَ إلى أكبر عدد ممكن من العوامل.

مثال

حلّل كثير الحدود x^4-81

الحلّ:

$$x^4-81=(x^2-9)(x^2+9)=(x-3)(x+3)(x^2+9)$$



رابعـــاً: التحليـــل بالطريقـــة المباشـــرة

مثال

حلّل: $x^2+9x+20$.

الحلّ

$$x^2+9x+20=x^2+4x+5x+4\times5$$
$$=x(x+4)+5(x+4)=(x+4)(x+5)$$

يمكن اختصارُ الخطوات السّابقة بطريقة تُسمّى (التحليل بالطّريقة المباشرة)

ونكتب: $x^2+9x+20=x^2+(4+5)x+4\times5=(x+4)(x+5)$



أيّاً كانت الأعداد الحقيقية $x\ ,\ a\ ,\ b$ فإنّ:



$$x^2+(a+b)x+a\cdot b=(x+a)(x+b)$$



تطبيق حلّل ما يأتي: x^2-3x+2

الحلّ:

نبحث عن عددين مجموعهما -3 وجداؤهما 2 نجد أنّ العددين هما -1 ، -2

ونكتب $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

حاول أن تحلّ

حلّل ما يأتي بالطّريقة المباشرة:

① $x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$

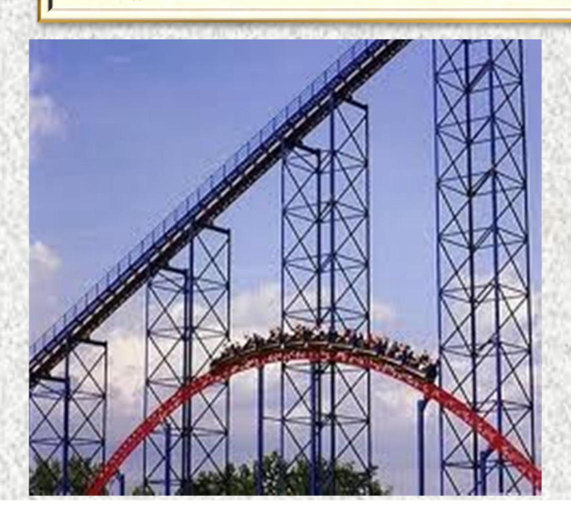
② $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

③ $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

④ $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$

⑤ $3x^3-18x^2-21x=3x(x^2-6x-7)=3x(x-7)(x+1)$

5 - 3 المعـــــــــــــــــــــادلات في $\mathbb{R}$



سوف تتعلّم

- حلّ المعادلات في $\mathbb{R}$.
- حلّ المتراجحات في $\mathbb{R}$.

أولاً: حل المعادلات الخطية في $\mathbb{R}$

تعلّمْتَ في العام الماضي حلّ المعادلات الخطيّة في مجموعة الأعداد النسبيّة مثل:

① $2x+3(x-1)=7$

② $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{3}{2}$

نُمدّد خواصّ المساواة (المعادلة المكافئة) في مجموعة الأعداد النسبيّة لتشملَ $\mathbb{R}$ وهي:

أيّاً كانت الأعداد a, b, c من $\mathbb{R}$

- $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$.
- $a=b$ تكافئ $a-c=b-c$.
- إذا كان $c \neq 0$ فإنّ: $a=b$ تكافئ $ac=bc$.
- إذا كان $c \neq 0$ فإنّ: $a=b$ تكافئ $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.
- $a+b=c$ تكافئ $a=c-b$.
- $a \cdot b=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$.

مثال 1

أوجد حلّ المعادلة الآتية في $\mathbb{R}$: $\frac{3}{4}+\sqrt{7}\,x=\frac{5}{2}$



الحل

$$\frac{3}{4}+\sqrt{7}x=\frac{5}{2}$$
$$\sqrt{7}x=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$
$$x=\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{7}}=\frac{7}{4}\times\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

مثال 2

أوجد حلّ المعادلة $\sqrt{3}x-2=x+4$ في $\mathbb{R}$

الحل:

$$\sqrt{3}x-2=x+4$$
$$\sqrt{3}x-x=4+2$$
$$\left(\sqrt{3}-1\right)x=6$$
$$x=\frac{6}{\sqrt{3}-1}$$ ويمكن تبسيطه

$$x=\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=3\left(\sqrt{3}+1\right)$$

تعلـــم

- يُبسَّط الكسر الذي في مقامه جذر تربيعي بإزالة الجذر التربيعي من مقامه.

تطبيق

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

الحل:

$$\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3}x=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\times 3}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(الجواب في أبسط صورة)

حاول أن تحلّ

حلّ في $\mathbb{R}$ كلاً من المعادلات الآتية:

① $\sqrt{3}(x+3) = -x+2$

$$\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} = -x + 2$$
$$\sqrt{3}x + x = 2 - 3\sqrt{3}$$
$$x\left(\sqrt{3}+1\right) = 2 - 3\sqrt{3}$$
$$x = \frac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

② $\sqrt{5}\,x + 2 = x + 2\sqrt{5}$

$$\sqrt{5}x + 2 = x + 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5}x - x = 2\sqrt{5} - 2$$
$$x\left(\sqrt{5}-1\right) = 2\left(\sqrt{5}-1\right)$$
$$x = 2$$

ثانياً: توظيف التحليل في حلّ المعادلات بمتغيّر واحد.

مثال 1

أوجد في $\mathbb{R}$ حلّ المعادلة: $x^2 - 6x = 0$

الحل:

$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x-6) = 0$$

إمّا $x = 0$

وإمّا $x - 6 = 0$ ومنه $x = 6$

مجموعة الحُلول هي: $\{0,6\}$

مثال 2

أوجد في $\mathbb{R}$ حلّ المعادلة: $6x^4 - 2x^3 = 0$

الحل:

$$6x^4 - 2x^3 = 0$$
$$2x^3(3x-1) = 0$$

تذكّر

$a \cdot b = 0$

يعني:

إمّا $a = 0$

وإمّا $b = 0$

تذكّر

① $a^n = 0$ ، $n \neq 0$

يعني $a = 0$

② $ax = 0$ ، $a \neq 0$

فإنّ: $x = 0$



إمّا $2x^3 = 0$ ومنه $x^3 = 0$ أي $x = 0$

وإمّا $3x - 1 = 0$ ومنه $3x = 1$ أي $x = \frac{1}{3}$

مجموعة الحُلول هي: $\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

حاول أن تحلّ

أوجد في $\mathbb{R}$ حلّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

① $16x^2 - 8x = 0$

$8x(2x^2 - 1) = 0$

إمّا $8x = 0$ ومنه $x = 0$

وإمّا $(2x^2 - 1) = 0$ ومنه $x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

② $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0$

$\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3} - x\right) = 0$

إمّا $\frac{1}{2}x^2 = 0$ ومنه $x = 0$

وإمّا $\left(\frac{1}{3} - x\right) = 0$ ومنه $x = \frac{1}{3}$

③ $7x^4 - 2x^2 = 0$

$x^2(7x^2 - 2) = 0$

إمّا $x^2 = 0$ ومنه $x = 0$

وإمّا $(7x^2 - 2) = 0$

وبالتّالي $x^2 = \frac{2}{7}$ ومنه:

إمّا $x = \sqrt{\frac{2}{7}}$

وإمّا $x = -\sqrt{\frac{2}{7}}$

④ $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

$x\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = 0$

إمّا $x = 0$

وإمّا $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = 0$ ومنه $x = \frac{5}{4}$

⑤ $9x^2 = 30x$

$9x^2 - 30x = 0$

$3x(x - 10) = 0$



إمّا $3x = 0$ ومنه $x = 0$

وإمّا $(x - 10) = 0$ ومنه: $x = 10$

مثال

أوجد في $\mathbb{R}$ حلّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

① $x^2 - 9 = 0$, ② $4x^2 - 25 = 0$

الحل:

① $x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

إمّا $x + 3 = 0$ ومنه $x = -3$

وإمّا $x - 3 = 0$ ومنه $x = +3$

مجموعة الحُلول هي: $\{3, -3\}$

② $4x^2 - 25 = 0$

$(2x - 5)(2x + 5) = 0$

إمّا $2x - 5 = 0$ ومنه $x = \frac{5}{2}$

وإمّا $2x + 5 = 0$ ومنه $x = \frac{-5}{2}$

مجموعة الحُلول هي: $\left\{\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}\right\}$

حاول أن تحلّ

أوجد مجموعة حُلول كلّ من المعادلات الآتية في $\mathbb{R}$.

① $3x^2 - 81 = 0$

$3x^2 - 9^2 = 0$

$(3x - 9)(3x + 9) = 0$

إمّا $3x - 9 = 0$ ومنه $x = 3$

وإمّا $3x + 9 = 0$ ومنه $x = -3$

② $5x^2 - 14 = 231$

$5x^2 = 245$

$x^2 = 49$

إمّا $x = 7$

وإمّا $x = -7$



③ $(3x-1)(x+5)=14x+22$

$3x^2+15x-x-5=14x+22$

$3x^2=27$

$x^2=9$

إمّا $x=9$

وإمّا $x=-9$

④ $9x^2=25$

$9x^2-25=0$

$3^2x^2-5^2=0$

$(3x-5)(3x+5)=0$

إمّا $3x-5=0$ ومنه $x=\frac{5}{3}$

وإمّا $3x+5=0$ ومنه $x=\frac{-5}{3}$

⑤ $x^2-13x+42=0$

$(x-7)(x-6)=0$

إمّا $x-7=0$ ومنه $x=7$

إمّا $x-6=0$ ومنه $x=6$

⑥ $x^2-10x+24=0$

$(x-6)(x+4)=0$

إمّا $x+6=0$ ومنه $x=6$

إمّا $x-4=0$ ومنه $x=4$

⑦ $x^2-x-110=0$

$(x-11)(x+10)=0$

إمّا $x-11=0$ ومنه $x=11$

إمّا $x+10=0$ ومنه $x=-10$

مثال

أوجد عددين الفرقُ بينهما 3 والفرق بين مُربّعيهما 21.

الحل:

نفترضُ العدد الأول x فيكون الثّاني $x-3$ ومُربّع العدد الأول x^2 فيكون مُربّع الثّاني $(x-3)^2$

نكتب بالرموز الفرق بين مُربّعيهما يساوي 21 أي:

$$x^2 - (x-3)^2 = 21$$
$$x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 21$$
$$x^2 - x^2 + 6x - 9 = 21$$
$$6x - 9 = 21$$
$$6x = 30$$

بالتالي $x = 5$ هو العدد الأول، فيكون العدد الثّاني $5 - 3 = 2$

حاول أن تحلّ

حلّ كلاً من المسألتين الآتيتين:

1. إذا زاد طول ضلع مُربّع بمقدار $2m$، زادت مساحة المنطقة التي يعيّنها $24m^2$،
أوجد طول ضلع المُربّع.

$x+2$ $(x+2)^2$ x^2 x

الحل

نفترض طول ضلع المربع x فيكون طوله بعد الزيادة $x + 2$

وبالتالي: مساحة المربع قبل الزيادة تساوي مساحته بعد الزيادة مطروحاً منها 24

$$x^2 = (x+2)^2 - 24$$

بالإصلاح $x^2 = x^2 + 4x + 4 - 24$

أي $4x = 20$ ومنه $x = 5$

وهو طول ضلع المربع قبل الزيادة.

2. إذا نقص طول ضلع مُربّع بمقدار $2m$، نقصت مساحة المنطقة التي يعيّنها $56m^2$،
أوجد طول ضلع المُربّع.

x x^2 $(x-2)^2$ $x-2$

الحل

نفترض طول ضلع المربع x فيكون طوله بعد النقصان $x - 2$

وبالتالي: مساحة المربع قبل النقصان = مساحته بعد النقصان + 65

$$x^2 = (x-2)^2 + 56$$

بالإصلاح $x^2 = x^2 - 4x + 4 + 56$

أي $4x = 60$ ومنه $x = 15$

وهو طول ضلع المربع قبل النقصان.

ثالثا: المتراجحات (المتباينات).

لقد تعلّمْتَ حلَّ المتراجحات وخواصّها في مجموعة الأعداد النسبيّة، نقبل بصحة هذه الخواصّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

مثال ①

حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{1}{3}x - 1 > 2$

الحل: $\frac{1}{3}x > 2 + 1$ ومنه $\frac{1}{3}x > 3$ بالتالي $x > 3 \times \frac{3}{1}$

أي $x > 9$ وبالتالي حلّ هذه المتراجحة هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأكبر من 9 ونُرمِّزها $]9 , +\infty[$

ونُسمِّيها مجالاً، ونُمثّل هذا المجال على خط الأعداد كما في الشّكل الآتي:



مثال ②

حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5} \leq \frac{1}{6}x$

الحل:

لإصلاح المتراجحة نضرب طرفي المتراجحة بالمضاعف المشترك

الأصغر للأعداد 6 ، 5 ، 3 هو 30

$$30\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\right) \leq 30\left(\frac{1}{6}x\right)$$

$$30 \times \frac{1}{3}x - 30 \times \frac{1}{5} \leq 30 \times \frac{1}{6}x$$

$$10x - 6 \leq 5x$$

$$10x - 5x \leq 6$$

ومنه $5x \leq 6$ بالتالي $x \leq \frac{6}{5}$

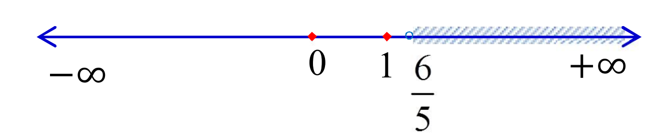
إنّ حلّ هذه المتراجحةِ هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأصغر من أو تساوي $\frac{6}{5}$ ونُرمِّز إليها بـ $\left]-\infty , \frac{6}{5}\right]$

تذكّر

خواص المتراجحات في $\mathbb{R}$ هي تمديد لخواصها في $\mathbb{Q}$ وهي:

- إذا كان $b > c$ وَ $a > b$ فإنّ: $a > c$
- إذا كان $c > 0$ فإنّ: $a \geq b$ تكافئ $c \cdot a \geq c \cdot b$
  $a \geq b$ تكافئ $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$
- إذا كان $c < 0$ فإنّ: $a \geq b$ تكافئ $c \cdot a \leq c \cdot b$
- $a \geq b$ تكافئ $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

ونُمثّل هذا المجالَ على خطّ الأعداد كما في الشّكل الآتي:



ملاحظة نُسمِّي كلّ مجموعة من المجموعات الواردة في الجدول الآتي مجالاً وترمّز:

مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأصغر من a	$]-\infty , a[$
مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأصغر من a أو يساوي a	$]-\infty , a]$
مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأكبر من a	$]a , +\infty [$
مجموعة الأعداد الحقيقيّة الأكبر من a أو يساوي a	$[a , +\infty [$
مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$	$]-\infty , +\infty [$

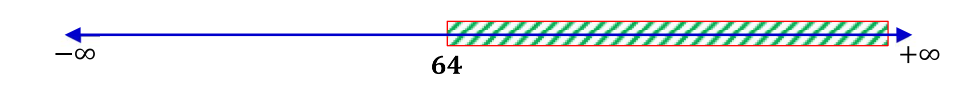
حاول أن تحلّ

حلّ المتراجحاتِ الآتيةَ في $\mathbb{R}$ ، ثُمَّ مثّل حُلول كلّ منها على خط الأعداد واكتبها على شكل مجالات:

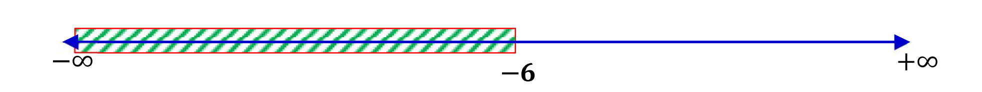
① $\frac{1}{8}x - 3 \le 5$ ② $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} < \frac{x}{3}$

الحل

① $\frac{1}{8}x - 3 \le 5$ $\frac{1}{8}x \le 8$ $x \le 64$ $x \in]-\infty, 64]$



② $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} < \frac{x}{3}$ $\frac{1}{4}x - \frac{x}{3} < \frac{1}{2}$ $-x < 6$ $x > -6$ $x \in]-6, +\infty[$



تمرينات الوحدة

1. أوجد عددين طبيعيّين متتاليين الفرقُ بين مُربّعيهما 25.

الحل:

نفرض العدد الأول (الصغير) x فيكون العدد الثاني (الكبير) $x+1$

فرق مربعي العددين 25 أي $(x+1)^2 - x^2 = 25$

نوجد حلول المعادلة $(x+1+x)(x+1-x) = 25$

$$(2x+1)(1) = 25$$

$$(2x+1) = 25$$

$$2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2} = 12$$

وهو العدد الأول فيكون العدد الثاني $12+1=13$

2. مُربّعان طول ضلع أحدهما يزيد (1) على طول ضلع الآخر، ومُربّع فرق مساحتيهما يساوي (81).
أوجد طول ضلع كلّ من المُربّعين.

الحل:

نفرض طول ضلع المربع الصغير x فتكون مساحته x^2

فيكون طول ضلع المربع الكبير $x+1$ فتكون مساحته $(x+1)^2$

مربع فرق المساحتين 81 أي $[(x+1)^2 - x^2]^2 = 81$

نجذر الطرفين فنجد $(x+1)^2 - x^2 = 9$

$$(2x+1)(1) = 9$$

$$2x+1 = 9$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

وهو طول ضلع المربع الصغير فيكون طول ضلع المربع الصغير $4+1=5$

3. أيّ من الحدود الجبرية الآتية عامل مشترك أعلى لكثير الحدود: $24x^2y - 18x^2y^2 + 45xy^2$

$a)\ 3x$ $b)\ -3x$ $c)\ 3xy$ $d)\ 6xy$



4. أيّ من الحدود الجبرية الآتية عامل مشترك أعلى لكثير الحدود: $7a^2b-14ab^2+21ab$

a) ab b) $-ab$ c) $7ab$ d) 7

5. انشر كلاً ممّا يأتي ثُمَّ اكتبِ الناتجَ بأبسط صورة:

① $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$

② $\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2=9x^2+2x+\frac{1}{9}$

③ $(x-2)^3=(x-2)^2(x-2)$

$=(x^2-4x+4)(x-2)$

$=(x^3-2x^2-4x^2+8x+4x-8)$

$=x^3-6x^2+12x-8$

④ $(x+2)^3=(x+2)^2(x+2)$

$=(x^2+4x+4)(x+2)$

$=x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8$

$=x^3+6x^2+12x+8$



الوحــــــــدة الخامســــــــة

لُغة الجبر

.1 أوجد منشور كلّ من العبارات الآتية بأبسط صورة:

a) $-4x(2x^2 - 5x + 18) = -8x^3 + 20x^2 - 72x$

b) $(-8a^3 - 12a^2 + 7a - 13)(11a^2) = -88a^5 - 132a^4 + 77a^3 - 143a^2$

c) $-3ab\left(\frac{-2}{3}a^2 + \frac{1}{6}ab - \frac{5}{9}a^2\right) = 2a^3b - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{5}{3}a^3b$

d) $(14xy^3 + 12x^2y^2 - 4x^3y)(-6x^2y^3) = -84x^3y^6 - 72x^4y^5 + 24x^5y^4$

e) $15x^2y^3(-15 + zy - 3x^2y - x^2y + 2y^3)$

$$= -225x^2y^3 + 15x^2y^4z - 60x^4y^4 + 30x^2y^6$$

f) $(a + 6)(-a - 1)(3a + 1) = (-a^2 - 7a - 6)(3a + 1) = -3a^3 - 22a^2 - 25a - 6$

$$= -3a^3 - 22a^2 - 25a - 6$$

g) $(2x - y)(3x + y)(5x + 2y) = (6x^2 - xy - y^2)(5x + 2y)$

$$= 30x^3 + 12x^2y - 5x^2y - 2xy^2 - 5xy^2 - 2y^3 = 30x^3 + 7x^2y - 7xy^2 - 2y^3$$

h) $(3 - 2y)^2 = 9 - 12y + 4y^2$

i) $(2x + y)(3x - 2y)^2 = (2x + y)(9x^2 - 12xy + 4y^2)$

$$= 18x^3 - 24x^2y + 8xy^2 + 9xy^2 - 12xy^2 + 4y^3 = 18x^3 - 15x^2y - 4xy^2 + 4y^3$$

j) $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y)$

$$= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

k) $(3x - 2)^3 = (3x - 2)^2(3x - 2)$

$$= (9x^2 - 12x + 4)(3x - 2) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

l) $(x + 1)^4 = (x + 1)^2(x + 1)^2 = 2(x + 1)^2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$

m) $(3x - 2 + 4y)(3x + 2 + 4y) = (3x + 4y - 2)(3x + 4y - 2)$

$$= (3x + 4y)^2 - 4 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 4$$



.2 بسِّط ما يأتي (بفرض كلّ المتغيرات تختلف عن الصّفر):

a) $\frac{x^4y^6}{x^5y^9} = \frac{1}{xy^3}$

b) $\frac{x^4y^5}{x^7y^6z} = \frac{1}{x^3yz}$

c) $\frac{-4a^8b^{16}}{a^7b^{13}} = -4ab^3$

d) $\frac{34a^6z^{17}}{-51a^7z^{16}} = \frac{34z}{-51a}$

.3 حل المسائل الآتية:

1) أوجد عددين طبيعيين أحدهما يزيد على الآخر بـ 3 ومجموع مربيعهما 149.

الحل

نفترض العدد الأول x فيكون الثاني $x+3$

اذن:

$$(x+3)^2 + x^2 = 149$$
$$x^2 + 6x + 9 + x^2 = 149$$
$$2x^2 + 6x - 140 = 0$$
$$x^2 + 3x - 70 = 0$$
$$(x+10)(x-7) = 0$$

$x = -10$ مرفوض

وهو العدد الأول $x = 7$ فيكون العدد الثاني $7 + 3 = 10$

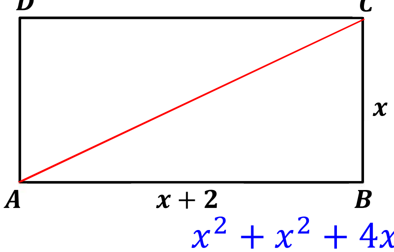
.4 عددٌ طبيعي إذا أضيف مربّعه الى ثلاثة أمثاله كان الناتج 88 أوجد هذا العدد.

الحل نفترض هذا العدد x نكتب: $x^2 + 3x = 88$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$
$$(x+11)(x-8) = 0$$

إمّا: $x = -11$ مرفوض. وإمّا: $x = 8$ وهو العدد المطلوب.

.5 مستطيلٌ يزيد طوله عن عرضه بـ 2 وطول قطره 10 أوجد بعديه.




الحل نفترض عرضه x فيكون طوله $x+2$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ABC:

$x^2 + (x+2)^2 = 100$ ومن $x^2 + x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$

$2x^2 + 4x - 96 = 0$ ومنه $x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$ ومنه إمّا $x = -8$ مرفوض

وإمّا $x = 6$ وهو عرض المستطيل فيكون طوله 8.



6. مُربّعان مجموع مساحتيهما 208 ومجموع طولي ضلعيهما 20، فأوجد طول ضلع كلّ منهما.

الحل: نفترض طول ضلع المُربع الأوّل x فيكون طول ضلع المُربع الثّاني $20 - x$

إذن: $x^2 + (20 - x)^2 = 208$ ومنه $2x^2 - 40x + 192 = 0$

$x^2 - 20x + 96 = 0$ أي $(x - 8)(x - 12) = 0$

$x = 8$ أو $x = 12$

إمّا $x = 8$ وهو طول ضلع المُربع الأوّل فيكون طول ضلع المُربع الثّاني $20 - 8 = 12$

وإمّا $x = 12$ وهو طول ضلع المُربع الأوّل فيكون طول ضلع المُربع الثّاني $20 - 12 = 8$

7. عددان صحيحان يزيد أحدهما على الآخر بمقدار 16، ومربّع الصّغير يزيد على الكبير بمقدار 26، أوجد العددين.

الحل: نفترض العدد الصّغير x فيكون العدد الكبير $x + 16$

مُربّع العدد الصّغير = العدد الكبير + 26

إذن: $x^2 = x + 16 + 26$ ومنه $x^2 - x - 42 = 0$ أي $(x - 7)(x + 6) = 0$

$x = 7$ أو $x = -6$

إمّا $x = 7$ وهو العدد الصغير فيكون العدد الكبير $7 + 16 = 23$

إمّا $x = -6$ وهو العدد الصغير فيكون العدد الكبير $-6 + 16 = 10$

8. حلّل ما يأتي:

a) $(x+1)(x-3) + 2(x+1)^2 = (x+1)[(x-3) + 2(x+1)] = (x+1)(3x-1)$

b) $(3x+2)(5x+7) - 6x - 4 = (3x+2)(5x+7) - 2(3x+2)$

$= (3x+2)(5x+7-2) = (3x+2)(5x+5)$

c) $(3a+2)^2 + (4a+1)(3a+2) = (3a+2)(3a+2+4a+1) = (3a+2)(7a+3)$

d) $2b^2 - 5a + 2ab - 5b = 2b^2 - 5b - 5a + 2ab = b(2b-5) + a(2b-5)$

$= (2b-5)(b+a)$



e) $4xy + 6x - 6y - 9 = 2x(2y + 3) - 3(2y + 3) = (2x - 3)(2y + 3)$

f) $4x^2 - 49 = (2x - 7)(2x + 7)$

g) $16x^2 + 8x + 1 = 16x^2 + 4x + 4x + 1 = 4x(4x + 1) + (4x + 1)$

$$= (4x + 1)(4x + 1) = (4x + 1)^2$$

h) $4 - 20x + 25x^2 = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 5x(5x - 2) - 2(5x - 2)$

$$= (5x - 2)(5x - 2) = (5x - 2)^2$$

i) $\frac{9}{25}x^2 - 16 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 - (4)^2 = \left(\frac{3}{5}x - 4\right)\left(\frac{3}{5}x + 4\right)$

j) $9x^2 - (x - 2)^2 = [3x - (x - 2)][(3x + (x - 2))] = (2x + 2)(4x - 2)$

k) $5x^2 - 405 = 5(x^2 - 81) = 5(x - 9)(x + 9)$

l) $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

m) $2x^4(x - 2) - 32(x - 2) = (x - 2)(2x^4 - 32) = (x - 2)[2(x^4 - 16)]$

$$= (x - 2)[2(x^2 - 4)(x^2 + 4)] = (x - 2)[2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)]$$

$$= 2(x - 2)^2(x + 2)(x^2 + 4)$$

n) $-36x^2 + 12xy - y^2 = -36x^2 + 6xy + 6xy - y^2 = -6x(6x - y) + y(6x - y)$

$$= (6x - y) \times y(-6x + y)$$

o) $3x^2y - 18xy + 27y = 3x^2y - 9xy - 9xy + 27y = 3xy(x - 3) - 9y(x - 3)$

$$= 3y(x^2 - 6x + 9) = 3y(x - 3)^2$$

p) $-20a^3b + 20a^2b^2 - 5ab^3 = -5a\,b(4a^2 - 4a\,b + b^2) = -5a\,b(2a + b)^2$





اختبار الوحدة الخامسة (الجبر)

أولاً : صنّافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
يتعرّف ضرب التعابير الجبرية	أولاً: 1، 2 ، 3 ، 4	يوجد ناتج قسمة كثير حدود على حد	ثانياً
يتعرف تحليل كثير الحدود	أولاً:5	ينشر باستخدام المتطابقات	ثالثاً
		يحلل بالتجميع	رابعاً
		يحل معادلة من الدرجة الثانية	خامساً
		يحل متراجحة من الدرجة الأولى	سادساً

ثانياً: الاختبار:

أولاً: اختر الإجابة الصّحيحة فيما يأتي:

1. حجم المكعب الذي طول حرفه $2x$:

$a)\ 4x^2$	$b)\ 4x^3$	$c)\ 8x^2$	$d)\ 8x^3$

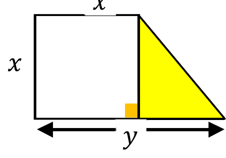
2. منشور $-2x(x-3)$ هو :

$a)\ -2x^2-6x$	$b)\ -2x^2+6x$	$c)\ -2x^2-6x$	$d)\ -2x^2+5x$

3. منشور $(3-2x)(-5x)$ هو :

$a)\ -15x+10x^2$	$b)\ 15x-10x^2$	$c)\ -15+10x^2$	$d)\ -8x+10x^2$

4. مساحة المنطقة الملوّنة في الشّكل المجاور:



$a)\ \frac{1}{2}(x-y)x$	$b)\ \frac{1}{2}(y-x)y$	$c)\ \frac{1}{2}(xy-x^2)$	$d)\ \frac{x}{2}(x+y)$

5. إنّ $x^2-8x-15$ يساوي:

$a)\ (x-5)(x-3)$	$b)\ (x-5)(x+3)$	$c)\ (x+5)(x-3)$	$d)\ (x+15)(x+1)$



6. إنّ $2x^2-12x+10$ يساوي:

$a)\ (x-5)(x-1)$	$b)\ 2(x-5)(x+1)$	$c)\ 2(x-5)(x-1)$	$d)\ (2x-1)(x-10)$

ثانياً: أوجد ناتج $\frac{4x^3-6x^2+20x}{20x}$ بأبسط صورة .

ثالثاً: انشر : $A=(2x-\frac{1}{2}y)^2$

رابعاً: حلّل: x^3-x^2+1-x

خامساً: حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^2=0$

سادساً: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\leq x+1$ ومثّل حلولها على خط الأعداد واكتبه على شكل مجال .



المعـــــــادلات الخطّيّــــــة بمجهــــــــولين

الـــــدّرس (6 – 1)

مُـــــــنظِّم الـــــــدّرس

أهداف الدّرس

التعرف على المعادلة الخطية بمجهولين.

مُفردات جديدة

المعادلة الخطية بمجهولين.

حلول المعادلة الخطية.

مُستلزمات الدّرس

كتاب الطالب والأنشطة.

سلك معدني.

ســـــير الـــــدّرس

التّمهيـــــــــد

- كتابة عنوان الدرس على السبورة.
- كتابة المُعادلة: $2x + 1 = 5$

والسّؤال ما اسم هذه المُعادلة وما هو حلها وما عدد حلولها ؟

- يسأل المُدرِّس ما محيط المُثلّث المتساوي الأضلاع وما محيط المُربّع ؟

التّـــــــدريس

- توضيح النّشاط في الصّفحة (108) بعرض سلك معدني وقسمه إلى قسمين لصُنع مُثلّث متساوي الأضلاع من أحدهما و مُربّع من الآخر.

(الجواب : يمكن أن ينفذ التصنيع الطّلاب أو ينفذه المدرس)



- السؤال عن العلاقة بين مجموع محيطي الشكلين وطول السلك ....

(الجواب : مجموع المحيطين يساوي طول السلك)

- تكليف مجموعات الطّلاب بالنشاط الوارد في الصّفحة 108 ومتابعة عملها.
- تسمية المُعادلة : $3x + 4y = 48$ مُعادلة خطية بالمجهولين x , y (من قبل المدرس)
- عرض التّعلم الوارد في الصّفحة (109) على السبورة أو من كتاب الطّالب.
- الطّلب من الطّلاب تنفيذ التّطبيق الوارد في الصّفحة (109) من كتاب الطّالب.
- الطّلب من الطّلاب تنفيذ ① من حاول أن تحلّ الوارد في الصّفحة (109)

(لتعميق فهم المُعادلة الخطية).

- طلب حل ② من حاول أن تحل الوارد في الصّفحة (109)

بعد توضيح معنى السّؤال من خلال مثال.

- توضيح أنّ الثُّنائية$(2 , 1)$ حلّ للمُعادلة $2x + y = 5$.
- تكليف المجموعات تنفيذ النشاط الوارد في الصّفحة (109)

(المتضمن حلول المُعادلة الخطية بمجهولين).

- عرض التّعلم الوارد في الصّفحة (110)من كتاب الطّالب إمّا على السّبورة أو من الكتاب.

الخاتمـــة وللتقـــويم

تحقّق من فهمك:

كتب زميلك المُعادلة : $2x - 3y = 6$:

1. ما اسم هذه المُعادلة ؟
2. كم ثُنائية تحقّق هذه المُعادلة، مع التعليل، وماذا نسمي مجموعة هذه الثُّنائيات ؟

تمـــــــــــــرّن

واجب منزلي:

حاول أن تحلّ صفحة (110) من كتاب الطّالب وحل ثلاثة تمارين مناسبة من كتاب الأنشطة.





المعـــــــادلات الخطّيـــــة

محتوى الوحدة

1. العلاقة بين متغيرين (مجهولين).
2. المعادلة الخطية بمجهولين.
3. التمثيل البياني للمعادلة الخطية.
4. ميل المستقيم.
5. معادلة المستقيم الموازي لـ $x'x$.
6. معادلة المستقيم الموازي لـ $y'y$.
7. الحلّ المشترك لمعادلتين خطيّتين جبرياً.
8. الحلّ المشترك لمعادلتين خطيّتين بيانياً.
9. توظيف المعادلات الخطيّة لحلّ بعض المسائل.

جمعَ عالمُ الرياضيات الخوارزمي أعمالَ الرياضيين العرب والهنود في مادة الجبر وطوّرها،
وقدّم في كتاباته حلولاً هندسية وجبرية لمسائلَ طرحَها الإغريقُ،
وقد قصد بالجبر نقلَ الحدود من أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر،
وقصدَ بالمقابلة اختصار ما يمكن اختصاره بعد عملية الجبر ثُمَّ إيجاد نتيجة المعادلة.
وقد عرضَ في كتابه (حساب الجبر والمقابلة) أو (الجبر) أوّل حلّ منهجي للمعادلات الخطيّة.



1 - 6 المعادلات الخطّيّة بمجهولين.

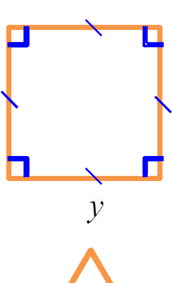


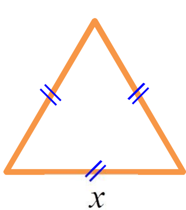


- المعادلة الخطية.
- تمثيل المعادلة الخطية بيانياً.

أولاً: المعادلة الخطيّة بمجهولين







نقسم سلكاً معدنياً طوله $48cm$ إلى قسمين لتشكيل مُربّع طول ضلعه y

ومُثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه x.

ما محيط كلٍّ منهما ؟



سلك معدني طوله $48cm$ نجزّئه إلى جزئين لتشكيل مثلث متساوي الأضلاع

طول ضلعه x يكون محيطه $3x$

ومربع طول ضلعه y يكون محيطه $4y$

العلاقة بين x وَ y هي: $3x + 4y = 48$

نسمي العلاقة: $3x + 4y = 48$ معادلة خطية بمجهولين.



تعلّم

المعادلة الخطية بمجهولين:

هي معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث $a,b,c\in\mathbb{R}$ والعددان a,b لا يساويان الصفر معاً.

تطبيق

عيّن الأعدادَ a,b,c في كلّ من المعادلات الخطيّة الآتية:

c	b	a	المعادلة الخطية		c	b	a	المعادلة الخطية	
5	0	3	$3x=5$	•	-3	5	2	$2x+5y=-3$	•
3	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}y=3$	•	0	3	-6	$3y-6x=0$	•
0	-1	1	$x-y=0$	•	1	$\sqrt{2}$	4	$1-4x=\sqrt{2}y$	•

حاول أن تحلّ

1. ضع إشارة ✓ في ☐ أمام كلّ معادلة خطيّة ممّا يأتي:

① $2x+3y=0$ ☑ ② $y=6+2x$ ☑

③ $5x^2-4y=1$ ☐ ④ $3x-2=0$ ☑

⑤ $x+\frac{1}{4}y=4$ ☑ ⑥ $x\cdot y=4$ ☐

⑦ $8x+2y=56$ ☑ ⑧ $y=\frac{1}{2}x-3$ ☑

2. لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة بمجهولين $3x+4y=7$، اكتبها على الشكل $y=mx+p$، وعيّن كلاً من m,p.

الحل:

$$4y=-3x+7$$

$$y=\frac{-3}{4}x+\frac{7}{4}$$

$$m=\frac{-3}{4}\quad,\quad P=\frac{7}{4}$$

ملاحظة

إنّ $\mathbb{R}^2$ ترمز إلى مجموعة الثّنائيات التي مسقطها الأوّل من $\mathbb{R}$ ومسقطها الثّاني من $\mathbb{R}$



ثانياً: حلول المعادلة الخطية

نشـــــاط

لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة: $x + 2y = 10$

1. بدّل 6 بـ x وَ 2 بـ y تجد أنّ الثُّنائيّة $(6, 2)$ تحقّق هذه المعادلة

نُسمّي هذه الثُّنائيّةَ حلاً للمعادلة.

2. أكمل الجدول الآتي لتكون الثُّنائيّة (x, y) حلاً للمعادلة:

الثُّنائيّة (x, y)	y	x
$(2, ...)$	....	2
$(....., 3)$	3	....

3. هل الثُّنائيّةُ $(6, 4)$ حلٌّ للمعادلة ؟

4. هل توجد ثنائيّات أخرى تحقّق المعادلة ؟ اذكر إحداها.

الحل:

1. $6 + 2(2) = 10$ **محققة.**

2. الجدول

الثنائية (x, y)	y	x
$(2, 4)$	4	2
$(4, 3)$	3	4

3. نبدل 6 بـ x و 3 بـ y فنجد $6 + 2(3) = 10$ وهذا غير صحيح

إذن: $(6, 4)$ ليست حل للمعادلة

4. وتوجد ثنائيات أخرى منها $(0, 5), (10, 0)$

تعلّم

- الثنائيات من $\mathbb{R}^2$ التي تجعل المعادلة محقّقةً تُسمّى حلولاً لها.
- لإيجاد حلّ للمعادلة الخطية نعطي لـ x أو y قيمةً عددية، ثُمَّ نحسب القيمة الموافقة للآخر.



تطبيق

كتبتْ ثناءُ على السبورة $(2x-3y=5)$ وقالت بتول

إنّ لهذه المعادلةِ الخطّيّة بمجهولين عدداً غيرَ منتهٍ من الحُلول في $\mathbb{R}^2$.

ما رأيك بهذا القول؟

الحل:

الرأي:

قول بتول صحيح، لأنّ تبديل كل عدد حقيقي بـ x نحصل على قيمة جديدة لـ y

أيّ يوجد عدد غير منتهٍ من الحُلول.

مثّل: $(1,-1)$, $\left(\frac{5}{2},0\right)$, ...

حاول أن تحلّ

يزيدُ عُمرُ سعيدٍ 6 سنوات على ضعفي عُمر أخته سلمى، فإذا افترضنا عمر سعيد x وعمر سلمى y

1. ضع الإشارة ✓ أمام المعادلة التي تمثل العلاقة بين عمريهما:

① .... $x+2y=6$ ☒ ③ .... $x=2y+6$ ☑

② .... $x-y^2=6$ ☒ ④ .... $x-2y=6$ ☑

2. هل العلاقةُ بين العمرين معادلة خطّيّة؟ **علل**

نعم لأنها تكتب على الشكل $ax+by=c$

3. أيّ الثنائيّات الآتية حلّ للمعادلة $x-2y=6$ ؟

① .... $(16\ ,\ 5)$ ☑ ③ .... $(2\ ,\ 10)$ ☒

② .... $(12\ ,\ 3)$ ☑ ④ .... $(8\ ,\ 1)$ ☑

4. إذا كان عمر سعيد 14 سنة فكم يبلغ عمر سلمى ؟

نستبدل 14 بـ x فنجد $14-2y=6$ أي $8=2y$ ومنه $y=4$ إذن: عمر سلمى 4 سنوات.

5. هل يمكن أن يكون عمر سعيد أقلّ من ست سنوات ؟ **علل**

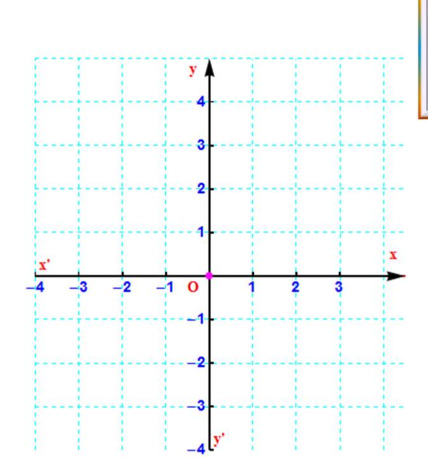
لا يمكن أن يكون عمر سعيد أقل من ست سنوات لأن عمر سلمى عندئذٍ سيكون عدد سالب وهذا غير ممكن.

ثالثًا: التمثيل البياني للمعادلة الخطية بمجهولين

تـــــــذكر

تعلّمتَ سابقاً التمثيلَ البيانيّ للمعادلة الخطيّة $y = mx$

ووجدْتَ أنّه مستقيم يمرُّ من المبدأ وسميتها معادلته وسميت العدد m ميله.



تدريب

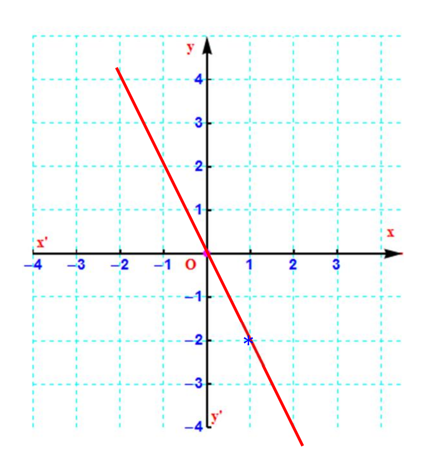
لتكن لدينا المعادلة الخطية $2x + y = 0$

1. اكتبها على الشكل $y = mx$ واستنتج الميل
2. ارسم مُمثّل هذه المعادلة.

الحل:

1. $y = -2x$ أي $m = -2$
2. للرسم نشكل الجدول الآتي:

x	y	النقطة
1	-2	$(1,-2)$
0	0	$(0,0)$



ثانيا: التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = mx + p$



نشــــاط

لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة $y = 2x - 3$

1. أكمل الفراغات في كل من الثنائيّات الآتية ليكوّن كلٌّ منها حلاً للمعادلة.

$(0 \;,\; ....)$ $(........ \;,\; 0)$

$(1 \;,\; ....)$ $(........ \;,\; 3)$

$(2 \;,\; ....)$

2. مثّل هذه الحُلولَ في المستوي الإحداثي المجاور.
3. تأكّد بالمسطرة أنّ النقط التي تمثّل الحُلول تقع على مستقيم واحد

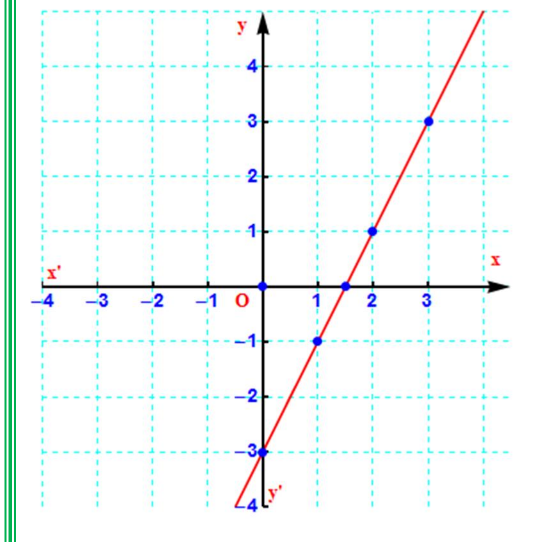


الحل:

.1

$(0 \;,\; -3) \;,\; \left(\frac{3}{2} \;,\; 0\right) \;,\; (1 \;,\; -1)$

$(3 \;,\; 3) \;,\; (2 \;,\; 1)$



2. نُمثّل هذه الحلول في المستوي الإحداثي المجاور.
3. نضع المسطرة على النقط التي تمثل الحلول تجد: أنّها تقع على مستقيم واحد.

نقبل أنّ
كلّ حلّ لهذه المعادلة يُمثّل بنقطة تقع على هذا المستقيم، وإحداثيي كل نقطة من هذا المستقيم حلّ لها.
يُسمّى هذا المستقيمُ التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x - 3$ وهي معادلته.

تعلّم

التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = mx + p$ في المستوي الإحداثي مستقيم ميله m



تطبيق

لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة $2x + y - 3 = 0$

1. اكتبِ المعادلة بالشكل $y = mx + p$.
2. تعلّم أنّ التّمثيل البيانيّ لهذه المعادلة مستقيم عيّن ميله.
3. ارسم المستقيم الممثّل لهذه المعادلة.

الحل:

1. $y = -2x + 3$
2. $m = -2$
3.

x	y	النقطة
0	3	$(0,3)$
$\frac{3}{2}$	0	$\left(\frac{3}{2},0\right)$

تحقّق من فهمك

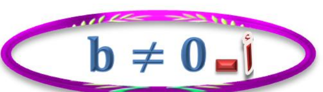
ما معنى القول: المستقيم Δ معادلته $y = -2x + 3$ ؟

الحل

إحداثيا كل نقطة من المستقيم Δ حل للمعادلة وكل حل للمعادلة يمثل بنقطة تقع على Δ.

ثالثاً: التمثيل البياني للمعادلة الخطية $ax + by = c$

نميّز الحالاتِ الثلاثَ الآتية:



أ- $b \neq 0$

تذكر

المعادلتان المتكافئتان: لهما الحلول ذاتها

المعادلة $ax + by = c$ تكافئ: $by = -ax + c$ أي $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$

نرمّز $m = \frac{-a}{b}$, $p = \frac{c}{b}$ تصبح المعادلة $y = mx + p$ وتعلّمنا أنّها تمثّل بمستقيم ميله $m = \frac{-a}{b}$.



تعلّم

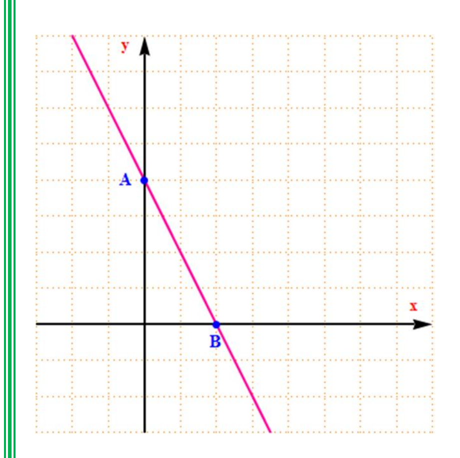
التمثيل البياني للمعادلة الخطية $ax + by = c$ حيث $b \neq 0$ في المستوي الإحداثي هو مستقيم ميله $m = -\frac{a}{b}$ وتُسمّى معادلةَ هذا المستقيم.

تطبيق ①

ارسمِ التّمثيلَ البياني للمعادلة الخطّيّة $2x + y = 4$

الحل:

هذه المعادلة خطّيّةٌ تمثيلها البياني مستقيم، يُرسم المستقيم بمعرفة نقطتين منه



نبدّل 0 بـ x نجد $y = 4$ إنّ $A(0,4)$ نقطةٌ من هذا المستقيم

(وهي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب)

نبدّل 0 بـ y نجد $x = 2$ إنّ $B(2,0)$ نقطة أخرى من هذا المستقيم

(وهي نقطة تقاطعه مع محور الفواصل)

نمثّل كلاً من النقطتين A , B في المستوي الإحداثي، فيكون (AB) المرسوم جانباً هو التّمثيل البياني للمعادلة

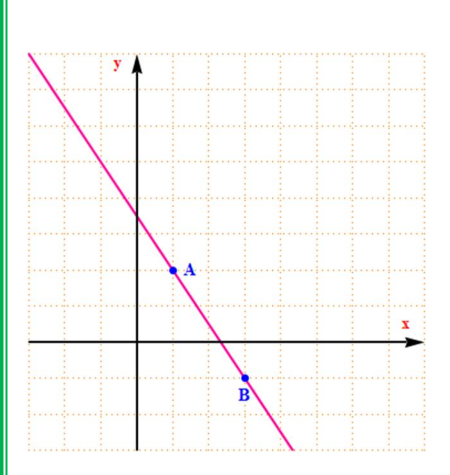


تطبيق ②

ارسم التّمثيل البيانيّ للمعادلة الخطّيّة $3x + 2y = 7$ واستنتج ميله.



الحل:



هذه المعادلة خطّيّة تمثيلها البياني مستقيم

يُرسَمُ المستقيمُ بمعرفة نقطتين منه

نبدّل 3 بـ x نجد $y = -1$ ، إنّ $A(3,-1)$ نقطة من هذا المستقيم

نبدّل 1 بـ x نجد $y = 2$ ، إنّ $B(1,2)$ نقطة أخرى من هذا المستقيم

نمثّل كلاً من النقطتين A , B في المستوي الإحداثي،

فيكون (AB) المرسوم جانباً هو التّمثيل البياني للمعادلة

ميل المستقيم $m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{2}$



حاول أن تحلّ

ليكن لدينا المستقيمُ Δ الذي معادلته $2x + 3y = 6$

1. ما ميلُ المستقيم Δ؟
2. ارسم Δ.

الحل:

نكتب المعادلة على الشكل: $y = \frac{-2}{3}x + 2$

نجد: التمثيل البياني هو مستقيم ميله $\frac{-2}{3}$

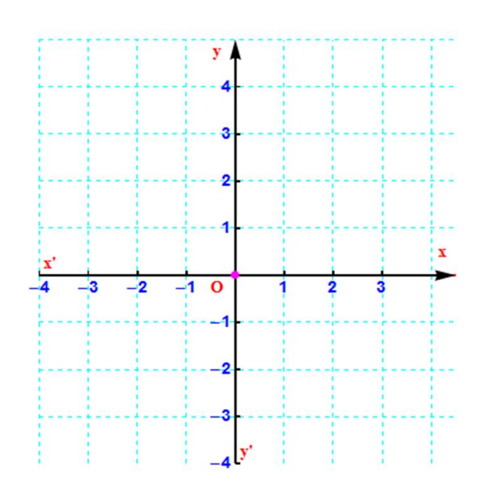
نعيّن جدول نقط

x	y	النقطة
0	2	(0,2)
3	0	(3,0)



تصبح المعادلة الخطّيّة بالشكل $ax + 0 \cdot y = c$ أو $ax = c$ أي $x = p$ حيث $p = \frac{c}{a}$





لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة $x = 2$

أكمل ما يأتي:

1. اكتب هذه المعادلةَ الخطّيّة بالشكل $1 \cdot x + \cdots y = \cdots$
2. الثنائيّات الآتية $(2,0), (2,1), (2,-1), (2,-2), (2,3)$ تحقِّق المعادلة السابقة {علل}.
3. مثِّل هذه الثنائيّات في المستوي الإحداثي وبيّن أنها تقع على مستقيم يوازي محور التراتيب، وبيّن أنّ كلّ حل للمعادلة يُمثَّل بنقطة من هذا المستقيم
4. خذ نقطةً من المستقيم السابق وبيّن أنّ إحداثيّاتِها تحقّق معادلته.
5. لاحظ أنّ نقط التّمثيل البياني (المستقيم السابق) متساويةُ البعد عن $y'y$ ، وهذا البعد يساوي 2



الحل:

أكمل ما يأتي:

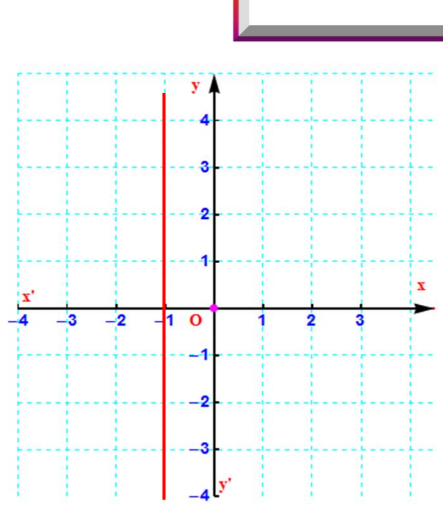
1. تُكتب هذه المعادلة بالشكل $1\,x + 0\,y = 0$
2. نبدّل الإحداثيات فنجد: $2=2\ ,\ 2=2\ ,\ 2=2\ ,\ 2=2\ ,\ 2=2$
3. تُمثّل هذه الثنائيات في المستوي الإحداثي بالشكل المجاور نجد أنها تقع على مستقيم يوازي المحور $y'y$
4. نأخذ النقطة $A\,(2,5)$ بندل إحداثياتها في المعادلة فنجد أنها تحققها.
5. نلاحظ أنّ هذه نقط التمثيل البياني (المستقيم السابق)متساوية البعد عن $y'y$، وهذا البعد يساوي 2

تعلّم

التمثيل البياني للمعادلة الخطيّة $x = p$ بالمجهولين (x, y) هو مستقيم يوازي محور التراتيب (عموديٌّ على $x'x$ أي لا يميل على $x'x$).

تطبيق

ارسمِ التّمثيلَ البيانيّ للمعادلة الخطيّة $x = -1$

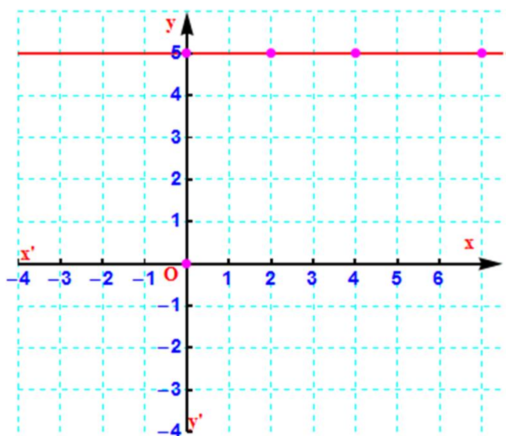


الحل:

التّمثيلَ البيانيّ للمعادلة الخطّيّة $x = -1$ كما في الشكل المجاور



ج. $a = 0$

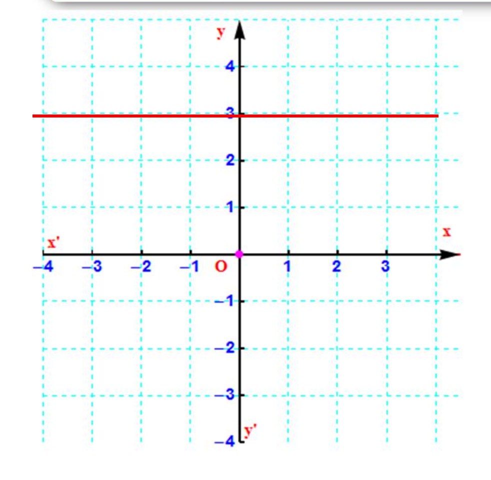


بمناقشة مماثلة لما سبق تصل إلى التّعلم الآتي:

تعلّم

التمثيل البياني للمعادلة الخطيّة $y = p$ بالمجهولين (x, y) هو مستقيم يوازي محور الفواصل وميله صفر).

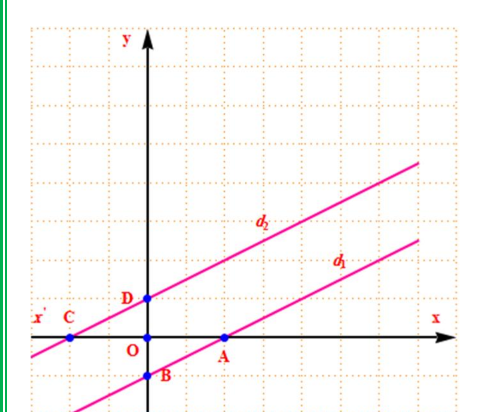




تطبيق

ارسمِ التّمثيلَ البيانيّ للمعادلة الخطّيّة $y = 3$

نشـــــاط



لتكن المعادلتان الخطيتان : $3x - 6y = -6$ ② ، $x - 2y = 2$ ①

تأمل الشكل المجاور ثُمّ أكمل ما يأتي:

- النقطتان $A(....,....)$, $B(....,....)$ من المستقيم d_1 الممثل للمعادلة ①
- النقطتان $C(....,....)$, $D(....,....)$ من المستقيم d_2 الممثل للمعادلة ②
- ميل المستقيم d_1 هو $\cdots = \frac{\cdots}{\cdots} = m_1$ وميل المستقيم d_2 هو $\frac{\cdots}{\cdots} = m_2$

$\cdots$ ، نستنتج أنّ $m_1 = m_2$

- إنّ المُثلّثين OAB, OCD متطابقان لأنّ أحدهما صورة الآخر وفق انعكاس مركزه $(0,0)$.

نستنتج أنّ $\hat{A} = \hat{C}$ علل ، إذن: $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$

الحل:

- النقطتان $A(2,0)$, $B(0,-1)$ من المستقيم d_1 الممثل للمعادلة ① وإحداثيات وكل منها تحقق هذه المعادلة.
- النقطتان $C(-2,0)$, $D(0,1)$ من المستقيم d_2 الممثل للمعادلة ②

وإحداثيات وكل منها تحقق هذه المعادلة.

- ميل المستقيم d_1 هو $m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ وميل المستقيم d_2 هو $m_2 = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ ، نستنتج أنّ $m_1 = m_2$
- إنّ المثلثين oAB, oCD متطابقان لأنّ أحدهما صورة الآخر وفق انعكاس مركزه $(0,0)$.

نستنتج أنّ $\hat{A} = \hat{C}$ وهما متبادلتان داخلاً ، إذن: $d_1 // d_2$

تعلّم

- إذا تساوى ميلا مستقيمين كانا متوازيين.
- إذا توازى مستقيمان كان لهما الميل ذاته.



تطبيق

ليكن لدينا المستقيمان الممثلان للمعادلتين
$$\begin{cases} ① \quad x - 2y = 4 \\ ② \quad y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

بيّن أنّ المستقيمين متوازيان.

الحل

ميل المستقيم الأول $m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ميل المستقيم الثاني $m_2 = \frac{1}{2}$

نستنتج أنّ $m_1 = m_2$ فالمستقيمان متوازيان.



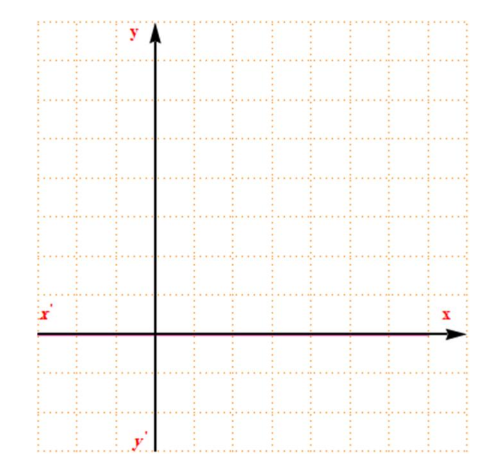
- لتكن لدينا المعادلةُ الخطّيّة $2x + 3y = 4$

ارسم المستقيم Δ الممثّل لها في المستوي الإحداثي المجاور

- لتكن لدينا المعادلة الخطّيّة $4x + 6y = 8$

ارسم المستقيم الممثل لها في المستوي الإحداثي السابق.

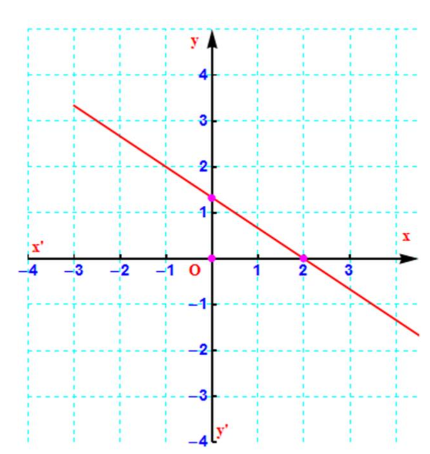
- ماذا تلاحظ ؟
- كيف تنتج إحدى المعادلتين من الأخرى ؟



الحل:

لرسم المستقيم الممثل للمعادلة $2x + 3y = 4$ نشكل الجدول

x	y	النقطة
-1	2	$(-1,2)$
2	0	$(2,0)$



لرسم المستقيم الممثل للمعادلة $4x + 6y = 8$ نشكل الجدول

x	y	النقطة
0	$\frac{4}{3}$	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$
2	0	$(2,0)$

نلاحظ أنّ المستقيمين طبوقين.

المعادلة الثانية تنتج عن الأولى بضربها بـ 2

أو المعادلة الأولى تنتج عن الثانية بقسمتها على 2.

إنّ: $4x + 6y = 8$ معادلة أخرى للمستقيم Δ.

تعلّم

إذا نتجت معادلةٌ خطيةٌ من أخرى بضربها بعدد يختلف عن الصفر، فإنهما تمثلان بيانياً بمستقيمين منطبقين.

تطبيق

المسقيم Δ معادلته: $3x - 2y = 3$ ، اكتب معادلة أخرى لهذا المستقيم.

الحل

نختار العدد 2 (مثلاً) ونضرب طرفي المعادلة به نحصل على المعادلة $6x - 4y = 6$





توزيـــع مـــادتي الجـــبر والهندســـة

ثلاث حصص للجبر وحصتان للهندسة أسبوعياً في الفصل الأول

حصتان للجبر وثلاث حصص للهندسة أسبوعياً في الفصل الثاني

الشهر	الأسبوع	الجبر	الهندسة
أيلول	3	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	4	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
تشرين الأول	1	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	2	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	3	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	4	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
تشرين الثاني	1	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
	2	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
	3	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	4	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
كانون الأول	1	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	2	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	3	الأعداد الحقيقية	الدائرة
	4	الأعداد الحقيقية	الدائرة

كانون الثاني	1	امتحان الفصل الأول + عطلة منتصف العام الدراسي	
	2		
	3		
	4	**لغة الجبر**	**الدائرة**
شباط	**1**	**لغة الجبر**	**الدائرة**
	2	**لغة الجبر**	**الدائرة**
	3	**لغة الجبر**	**الدائرة**
	4	**المعادلات الخطية**	**التحويلات الهندسية**
آذار	1	**المعادلات الخطية**	**التحويلات الهندسية**
	2	**المعادلات الخطية**	**التحويلات الهندسية**
	3	**المعادلات الخطية**	**التحويلات الهندسية**
	4	**التوابع**	**التحويلات الهندسية**
نيسان	1	**التوابع**	**تتمات في المضلعات**
	2	**الاحتمالات**	**تتمات في المضلعات**
	3	**الاحتمالات**	**تتمات في المضلعات**
	4	**الاحتمالات**	**تتمات في المضلعات**
أيار	مراجعة عامة		